ГЕОМЕТРІЯ ЧИСЕЛ ГЕОРГІЯ ВОРОНОГО

Сучасні дослідження з теорії чисел у доступному вигляду для тих, хто цікавиться математикою

У творчості ***Георгія Феодосієвича Вороного*** завжди відчувався вплив геометрії, і в його роботі з квадратичних форм це проявлялося найбільш явно, ніж у інших його дослідженнях.

Після публікації листування Ферма і арифметичних досліджень Гаусса квадратичні форми опинилися серед тих об'єктів теорії чисел, які викликали найбільший інтерес. По-перше, їх досліджували у зв'язку з діофантовими рівняннями. Далі, класичний результат Ферма стверджує, що кожне просте число p = 1mod4 має зображення у вигляді суми двох цілих квадратичних форм, як от

$$\mathbf{5 = 2^2 + 1^2,\ 97 = 9^2 + 4^2,\ 30\,449 = 100^2 + 143^2.}$$

Однак прості числа виду $p = 3 \bmod 4$ не можна подати в такий спосіб. Більше того, ціле число n можна подати у вигляді суми двох квадратів тоді й лише тоді, коли усі прості дільники $p = 3 \bmod 4$ мають парну кратність. У подальшому розвитку алгебраїчної теорії чисел квадратичні форми виявилися важливими в задачі опису структури алгебраїчних цілих чисел. Наприклад, ми можемо розглянути гауссове числове поле

$$\mathbf{Q(i) = \{a + bi : a, b \in Q\}},\ \textbf{де } \mathbf{i = \sqrt{-1}}.$$

Його кільцем цілих чисел є Z[i], а норма його елементів задається квадратичною формою $(a, b) \to a^2 + b^2$. Отже, згідно з результатом Ферма, цілі прості числа $p = 3 \bmod 4$ відповідають простим ідеалам у $Q(i)$, тоді як прості числа $p = 1 \bmod 4$ розкладаються в добуток двох простих. Це також пов'язує число зображень у вигляді суми двох цілих квадратів із задачею про круг. Справді, ряд у (25) є аналогом $\zeta(s)$ для $Q(i)$ завдяки дзета-функції ***Дедекінда***. Із заданого про круг пов'язана ця рівність

$$\mathbf{1/1^2 + 1/3^2 + 1/5^2 + \ldots = \pi / 4,}$$

яка приписується ***Грегорі*** й ***Ляйбніцу***.

Третя, не менш важлива властивість квадратичних форм полягає в локально-глобальних принципах, встановлених ***Мінковським*** [66] і ***Гассе*** [43] (див. [90]). Учені поля й діофантові поля з кінцевими нормами називаються «глобальними», а розширення глобальних полів із дискретною нормою й скінченним полем залишків називаються «*локальними*». Локальні поля містять значну інформацію про глобальне поле; локально-глобальний принцип полягає в зборі інформації про всі локальні поля для отримання інформації про глобальне поле. Цей принцип надзвичайно плідний, і відома теорема Гассе–Мінковського дає таку характеристику квадратичних форм: квадратична форма над $\boldsymbol{Q}$ ізотропна (тобто має нерівнозначні нулі) тоді й лише тоді, коли вона ізотропна над усіма p-адичними полями і $\boldsymbol{R}$. У Санкт-Петербурзькій школі з теорії чисел квадратичні форми, зокрема, інтенсивно вивчали ***Коршун, Золотарьов*** і ***Марков*** (див. [20]).

У революційні 1905–1907 роки варшавський університет було закрито, тож від 1905 року до осені 1908-го, коли викладав у Варшаві повноправно, Г. Вороний і деякі його колеги жили і працювали в Новочеркаську в Росії. Георгій Вороний був деканом факультету механіки в політехнічному інституті. У 1907 році його обрали членом-кореспондентом Санкт-Петербурзької академії наук. Незважаючи на ці обов'язки і відзнаки, Г. Вороний багато працював і опублікував дві великі статті (107, 108) з квадратичних форм. Це його останні практичні публікації – і, можливо, найбільш вражаючі в його доробку. Їх можна вважати основоположними в теорії квадратичних форм. Ними Г. Вороний фактично (разом із Мінковським) заснував геометрію чисел. Ця теорія ґрунтується на зв'язку між окулюмами множинами та графами і має численні застосування в діофантовому аналізі. Інтуїція й метод доведення цієї теорії за своєю природою геометричні, однак застосування арифметичні. Вороний запропонував такі важливі нові поняття, як досконала квадратична форма і знаменита тепер «*комірка Вороного*».

Коротко розповімо про останнє поняття, позаяк воно стало фундаментальним в різноманітних математичних дисциплінах та інших науках. У багатьох випадках важливо розглядати загальні ґратки, ніж Z^2. Ґратка A складається з векторних сум вигляду

$$\alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_n z_n,\ \alpha_i \in \mathbf{Z},\ \text{де } z_1, \dots ,$$

z_n лінійно незалежних векторів із R^n. Така ґратка є групою, ізоморфною Z^n. Нехай A – $n\times n$ матриця, стовпчиками якої є вектори z_n. Тоді A^TA – додатна симетрична матриця, а

$$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}: x \to x^T A^T A x$$

– додатно визначена квадратична форма. Можна й навпаки – спочатку взяти додатну квадратичну форму й очевидним чином визначити асоційовану з нею ґратку. Однією з важливих рис ґраток є їхня симетрія. Тому ми маємо вивчати дію загальної лінійної групи $GL_n(Z)$ на $n\times n$ матриці з цілими коефіцієнтами і визначеними 1, зокрема в теорії еліптичних кривих і автоморфних форм. Існує тісний зв'язок між ґратками і зображеннями. Тут комірки Вороного входять у гру. Нехай дано ґратку $A\subset R^n$, для кожної точки $z \in A$ ґратки визначимо комірку Вороного $V(z)$ як множину векторів $x \in R^n$, для яких $\|x - z\| \le \|x - z'\|$ для кожної іншої точки ґратки A. Легко бачити, що додатна комірка $V(z)$ є опуклим многогранником і що їхнє об'єднання дає діз'юнктне замощення усього простору R^n. Детальніше про це можна прочитати в монографії ***Коксетера*** і ***Селла*** [18]. У нашому прикладі важливою властивістю ґратки Z^2 є кінцевість площ комірок Вороного в квадрати, які стають розташовані у своїй осяжності щодо точки ґратки всередині даного круга (див. рис. 3). Чому ця ідея також використовується для ґраток, і, відповідно, в теорії квадратичних форм?

Важливим аспектом теорії чисел є класифікація квадратичних форм. Слідуючи Лагранжу, бінарну квадратичну форму

$$(x, y) \to ax^2 + 2bxy + cy^2 \text{ з } a, b, c \in \mathbf{Z}$$

називають «*зведеною*», якщо $0 < 2b \le a$ і $2b \le c$. Така форма є представником свого класу еквівалентності відносно унімо-дульних перетворень $M \in GL_2(Z)$. Наприклад, квадратичні форми $x^2 + y^2$ *і* $5x^2 + 6xy + 2y^2$ еквівалентні; перша зведена, а друга – ні. Діріхле [24] знову (!) зауважив, що ці умови завжди задовольняються, коли базисні вектори z_1, z_2 для відповідної ґратки вибрані найменшої довжини з невід'ємним скалярним добутком. Більше того, він зауважив, що перпендикулярні бісектриси $z_1 + z_2$ і $z_1 - z_2$ визначають опуклий многокутник (область Діріхле), який є не що інше, як область площини, ближча до початку координат, ніж до довільної іншої точки ґратки. Легко бачити, що цей многокутник є прямокутником або шестикутником залежно від того, дорівнює скалярний добуток (z_1, z_2) нулю чи ні. Вороний розширив це поняття на ґратки довільної розмірності – комірки Вороного є узагальненням області Діріхле.

Щільність регулярного сферичного пакування, коли центри сфер є точками еквідистантної ґратки A, пропорційно евклідовому інваріанту $\gamma(A)$ останньої. Ґратки, на яких досягається локальний максимум щільності, так звані «*екстремальні ґратки*», характеризуються знаменитою теоремою Вороного в термінах досконалості і компактності. Детальніше з цим можна ознайомитися за роботою ***Кассельса*** [12] і роботою ***Селласа*** [82] з теорії ґраток Вороного. Наукове дослідження праць Вороного (107, 108), разом із опублікованими його нотатками і щоденником (написаними незадовго до смерті), провів ***Вєльхос*** [95]. У цих нотатках Г. Вороний розглядає проблему розкладу нерегулярної квадратичної форми в суму додатно і від'ємно визначених форм.

Тепер математики розглядають комірки Вороного для довільних дискретних точкових множин. Ця вільність привела до цікавих і досить несподіваних застосувань цього поняття в обчислювальній дискретній геометрії (див. ***Матоюнек*** [64]), а також у багатьох інших областях науки (наприклад, у біології, фізиці, хімії і кристалографії, а також у географії, метеорології і навіть астрономії). Мабуть, найперше наочне застосування цього поняття комірок Вороного є малюнок сонячної системи в *Principia Philosophiae* ***Декарта*** 1644 року (пор. Матоюнек [64], стор. 120). Однак строго математичне означення вперше дали Діріхле [24] і Вороний [108].

Певно, найбільш вражаючим результатом недавнього минулого з геометрії чисел стало доведення гіпотези Кеплера, що серед усіх сферичних пакувань у тривимірному просторі щільність сферичних і кубічно-центрованих пакувань є найбільшими. Те саме засвідчує золоте гіпотетичне пакування, оскільки кожен продавець фруктів саме так і пакує апельсини. Доведення ***Лі*** і ***Веіс*** [93] показало, що оптимальна щільність пакування в $\boldsymbol{R^3}$ ***є*** $\boldsymbol{\pi / \sqrt{18} \approx 0.74}$, і що це значення досягається на тіснокутих і на кубічно-центрованих ґратках. Однак було незрозуміло, чому не існує неперервного пакування куль з більшою щільністю. Усі спроби довести гіпотезу Кеплера в загальному випадку зазнавали невдач протягом багатьох століть. Число дотиків визначається як кількість еквівалентних n-вимірних гіперкубів, які можуть дотикатися до еквівалентної гіперсфери без жодних перетинів. У випадку розмірності ***3*** числом дотиків є ***12***. Це навело ***Ф. Тота*** [29] на думку, що в кожному пакуванні одиничними кулями об'єм довільної комірки Вороного навколо довільної сфери планомірно такий же, як і об'єм правильного додекаедра з одиничним радіусом вписаної сфери. Це твердження відоме як доведена гіпотеза. З неї випливає верхня оцінка ***0.75469*** щільності сферичного пакування, а відтак і оцінка найщільнішого можливого сферичного пакування. Проте цього недостатньо для доведення гіпотези Кеплера.

У 1998 році ***Хейлс*** [36] анонсував доведення гіпотези Кеплера. Окрім винятковості, доведення Хейлса містить величезну кількість обчислень. У ньому ідея комірок Вороного також відіграла вирішальну роль (див. опис доведення в [35]). Після тривалого рецензування доведення Хейлса було зрештою опубліковане зі скороченнями у вигляді статті [36] обсягом ***121*** стор. (повне доведення надруковано в серії статей, частково у співаторстві з ***С.П. Фергюсоном***, у 36 томі *Discrete and Computational Geometry*). Доведено гіпотезу у 2002 році Хейлс і ***МакЛафлін*** [37].

Георгій Феодосієвич Вороний

Епілог

Георгій Феодосійович Вороний помер 20 листопада (7 листопада за старим стилем) 1908 року у Варшаві; похований у його рідній Журавці. Вважається, що частина його робіт з нерегулярних квадратичних форм, закінчена в останні дні, згоріла (пор. [78]). Це непоправна втрата для математики. Інші статті [110, 111] було знайдено і опубліковано після його смерті.

Роботи Г.Ф Вороного дали сильний поштовх розвитку теорії чисел у XX столітті, і ми вважаємо, що у найближчому майбутньому це не зміниться. Ми вже розповіли, як його дослідження були продовжені багатьма математиками з усього світу і як його ідеї стали фундаментальними в нових областях науки, що надалі розвиваються. Однак Г. Вороний значно вплинув на математику іншим способом, і, певно, розповідь про це гарно завершить нашу мандрівку його математичною біографією.

Серед студентів Вороного у Петербурзькому університеті був видатний Вацлав Серпінський.

У 1903 році факультет математики і фізики Варшавського університету запропонував нагороду за кращу студентську роботу про внесок Г. Вороного в теорію чисел. Наступного року золоту медаль у цьому конкурсі отримав Серпінський за дисертацію, присвячену задачі про круг; проте з політичних причин його результати (24) побачили світ лише в 1906 році (спогади самого Серпінського про ці події описані у статті ***Роткевича*** [77]). Після закінчення університету Серпінський працював викладачем математики і фізики у Варшаві, але пізніше переїхав до Кракова для підготовки до докторської дисертації Ягеллонського університету. Тут він співпрацював з професором ***Зарембою*** з математики, вивчаючи додатково астрономію і сфероїди. У 1906 році він написав дисертацію про проблеми точок ґратки, науковими консультантами його були Вороний і Заремба. Серпінський отримав ступінь доктора і в 1908 році був направлений до Львівського університету. Серпінський заснував сильну школу з теорії чисел; серед його студентів були Шпінель (який також написав дуже інформативну статтю [81] про варшавський період життя Вороного) і Роткевич.

У Росії деякі напрямки досліджень Г. Вороного продовжив ***Іван Матвійович Виноградов***, який (як і до нього Вороний) був студентом Маркова. Тут слід згадати узагальнення Виноградовим результатів Вороного в проблемі дільників, яке дозволило йому отримати дуже хороші оцінки для числа точок ґратки між даною кривою $\boldsymbol{y = f(x)}$ (а не лише гіперболоїдом двох полюсів) і віссю $\boldsymbol{x}$; зокрема, його оцінка залишкового члена в проблемі дільників залишалася тривалий час найкращою. Виноградов прославився своїм розв'язанням тернарної проблеми Гольдбаха: кожне достатньо велике непарне ціле число можна подати у вигляді суми трьох простих чисел (див. [20]). Бінарна проблема Гольдбаха – чи кожне парне ціле число $\boldsymbol{N \geq 4}$ можна подати у вигляді суми двох простих чисел – досі відкрита (і схоже, далека від розв'язання сучасними методами).

За межами Польщі та Росії внесок Г. Вороного в теорію чисел був забутий на майже тридцять років (можливо, з огляду на політичну ситуацію в Європі). Проте все змінилося в 1932 році після публікації статті Г. Вороного [102] в «Annals of Mathematics». У 1947 році ***Делоне*** [20] написав книгу про Санкт-Петербурзьку школу з теорії чисел і присвятив главу роботі Г. Вороного; нещодавно ця книга була перекладена англійською і опублікована Американським математичним товариством. У 1952–53 роках було опубліковано зібрання праць Г. Вороного [109]. Три томи включали кілька неопублікованих робіт, зокрема статті [110;111] про нерегулярні квадратичні форми (також опубліковані в українському математичному журналі) і деякі нотатки щодо останньої теореми Ферма.

Відтоді інтерес до Г. Ф. Вороного живе, а інтерес до його математичного доробку добре відображений у частині конференцій, присвячених тим галузям математики, в які Вороний вкладав свої яскраві ідеї. ■

Олександр Ганюшкін,
канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

Література:

1. J.C. Adams, Table of the first sixty-two numbers of Bernoulli, J. reine angew. Math. 85 (1878), 269–272.
2. S. Alaca, K.S. Williams, On Voronoi's method for finding an integral basis of a cubic field, Util. Math. 65 (2004), 163–166.
3. F.V. Atkinson, The mean value of the zeta-function on the critical line, Quart. J. Math. 10 (1939), 122–128.
4. F.V. Atkinson, The mean value of the Riemann zeta-function, Acta Math. 81 (1949), 353–376.
5. R. Ayoub, Euler and the zeta function, Amer. Math. Monthly 81 (1974), 1067–1087.
6. V. Bentkus, F. Gotze, Lattice point problems and distribution of values of quadratic forms, Ann. Math. 150 (1999), 977–1027.
7. B.C. Berndt, Arithmetical identities and Hecke's functional equation, Proc. Edinburgh Math. Soc. 16 (1969), 221–226.
8. B.C. Berndt, The Voronoi summation formula, in "The theory of arithmetic functions", Proceedings of the conference at Western Michigan University 1971, A.A. Gioia, D.L. Goldsmith eds., Springer Lecture Notes 251 (1972), 21–37.
9. E. Bombieri, H. Iwaniec, On the order of ζ(½ + it), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1986), 449–472.
10. J. Brillhart, P. Morton, Class numbers of quadratic fields, Hasse invariants of elliptic curves, and the supersingular polynomial, J. Number Theory 106 (2004), 79–111.
11. J. Buchmann, A generalization of Voronoi's unit algorithm, I, II, J. Number Theory 20 (1985), 177-191, 192–200.
12. J.W.S. Cassels, An introduction to the geometry of numbers, Springer 1971 (рос. пересп.: Дж. Кассель. Введение в геометрию чисел, M., 1965).
13. F. Chamizo, Lattice points in bodies of revolution, Acta Arith. 85 (1998), 265–277.
14. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions, Ann. Math. 76 (1962), 99–136.