

<https://doi.org/10.15407/knit2024.06.084>
УДК 521.33:551.24

М. М. ФИС¹, д-р техн. наук, проф., проф. кафедри

ORCID ID: 0000-0001-8956-2293

E-mail: mykhailo.m.fys@lpnu.ua

А. М. БРИДУН¹, канд. фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри

ORCID ID: 0000-0001-5634-0512

E-mail: andrii.m.brydun@lpnu.ua

І. І. ДЕМКІВ¹, д-р фіз.-мат. наук, проф., зав. кафедри

ORCID ID: 0000-0003-4015-8171

E-mail: ihor.i.demkiv@lpnu.ua

Т. М. ХОМЕТА^{1,2}, канд. техн. наук, старш. викл. кафедри ОМП, старш. викл. кафедри ПМіФ

ORCID ID: 0009-0003-6093-8682

E-mail: taras.m.khometa@lpnu.ua

¹ Національний університет «Львівська Політехніка»

вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013

² Українська академія друкарства

вул. Під Голоском 19, Львів, Україна, 79020

ЗВЕДЕННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ ПОСТІЙНИХ ПЛАНЕТ ЗЕМНОЇ ГРУПИ В ЄДИНУ ПЛАНЕТАРНУ СИСТЕМУ КООРДИНАТ

Дві групи величин, що характеризують планету як небесне тіло, — динамічне стиснення та параметри зовнішнього гравітаційного поля планети — задаються в різних системах координат. Проте сучасні запити природничих наук про планети, включаючи Землю, потребують спільного застосування цих параметрів, що вимагає їхнього подання в єдиній системі координат. У більшості випадків коефіцієнти розкладу гравітаційного поля до сьогодні приводяться в систему координат, пов'язану з головними осями планетарного еліпсоїда, в якій назначається динамічне стиснення. Логічніше робити навпаки: виразити динамічне стиснення планети в її загальнопланетарній прямокутній системі координат, залишаючи незмінними коефіцієнти розкладу гравітаційного поля в ряд. Це значно скорочує кількість обчислень та похибку при зведенні до планетарної системи координат, яка стає все більш уживаною у практиці у зв'язку з її використанням в GPS-технологіях. У роботі наведено формулу динамічного стиснення планети через всі тензори другого порядку гравітаційного поля небесних тіл Земної групи Сонячної системи. Виконано зведення параметрів в єдину прямокутну систему координат для цих планет. Для конкретних моделей гравітаційного поля планет визначено коефіцієнти пропорційності, з якими входять тензори інерції. На прикладі планети Земля показано можливість застосування при побудові тривимірних моделей розподілу мас надр небесного тіла до другого порядку включно та виконано порівняння обчислень значень щільності в двох різних системах координат. Результати порівняння підтвердили правильність алгоритму зведення в одну систему координат. Завдяки такому підходу спрощується інтерпретація отриманих результатів, оскільки появляється можливість безпосереднього використання наявних картографічних матеріалів для візуалізації отриманих результатів. Це, в свою чергу, дає змогу пов'язати особливості розподілу неоднорідностей мас планет з географією особливостей фігури небесного тіла.

Ключові слова: планетарна система координат, динамічне стиснення, гравітаційне поле, розподіл мас, щільність.

Цитування: Фис М. М., Бридун А. М., Демків І. І., Хомета Т. М. Зведення фундаментальних постійних планет земної групи в єдину планетарну систему координат. *Космічна наука і технологія*. 2024. **30**, № 6 (151). С. 84–93. <https://doi.org/10.15407/knit2024.06.084>

© Видавець ВД «Академперіодика» НАН України, 2024. Стаття опублікована за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC-ND license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

Вступ. Для небесних тіл в основному розрізняють дві системи координат, пов'язаних з ними. Параметри гравітаційного поля планети (стоксові постійні) практично завжди описуються у планетарній системі координат $Ox_1x_2x_3$ [9], водночас така важлива величина, яка характеризує небесне тіло як механічну структуру, — динамічне стиснення H [1] (астрономічний параметр) — визначається в системі $Oy_1y_2y_3$, осі якої є головними осями інерції цього тіла. Досить часто виникає необхідність розгляду значень параметрів обох типів в одній системі. Це стосується насамперед побудови тривимірних моделей щільності планет, де використовуються параметри гравітаційного поля планети [10] (постійні Стокса) та динамічне стиснення. На сьогодні стоксові постійні та величина H , подані в різних системах координат, зводились до однієї системи координат $Oy_1y_2y_3$ [7], що передбачало велику кількість обчислень та додаткових помилок. Більш раціонально є виразити величину H в системі координат $Ox_1x_2x_3$ [13]. Це вимагає переходу від однієї системи координат в іншу. У нашому випадку потрібно виконати поворот системи координат, який можна реалізувати різними способами, наприклад використати кути Ейлера [9] (рис. 1). Інший спосіб базується на мультипольному поданні гравітаційного поля [7].

Подання частини потенціалу кульовими функціями у прямокутній системі координат до другого порядку включно можна розглядати як квадратичну форму. Це дає можливість використати математичний апарат зведення квадратичної форми до канонічного вигляду та породжує алгоритм зображення величин в системі координат $Ox_1x_2x_3$ [3]. Один з варіантів реалізації подано в роботі [6]. Адаптуючи його, здійснимо обернений перехід від системи $Oy_1y_2y_3$ до загальнопланетарної Y та виразимо формулу для динамічного стиснення в ній.

Виклад основного матеріалу. Поворот системи координат $Oy_1y_2y_3$ у матричному вигляді можна подати так [6]:

$$X = AY, \quad (1)$$

де

$$X = (x_1x_2x_3), \quad Y = (y_1y_2y_3), \\ A = (a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33}).$$

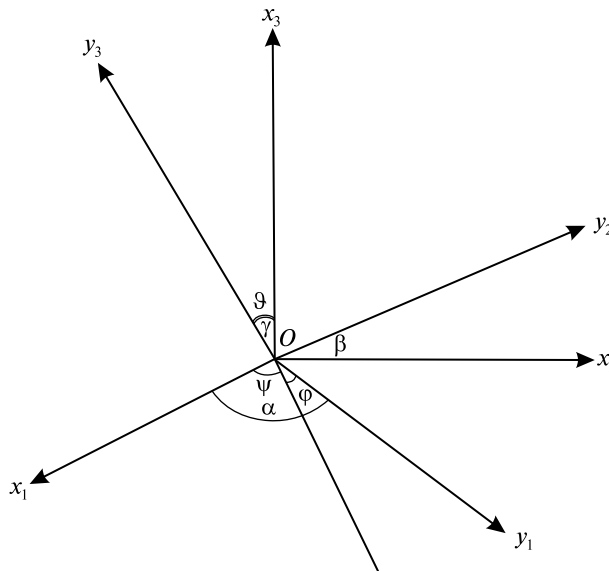


Рис. 1. Кути поворотів системи координат та кути Ейлера

Обернений перехід від системи координат X до Y такий:

$$Y = A^{-1}X = BX, \quad (2)$$

де

$$B = A^{-1} = (b_{11}b_{12}b_{13}b_{21}b_{22}b_{23}b_{31}b_{32}b_{33}). \quad (3)$$

Формула для динамічного стиснення H в системі координат $Oy_1y_2y_3$ [1]:

$$H = \frac{C - (A + B)/2}{C} = \frac{C_{20}}{\int_{\tau} \delta(y_1^2 + y_2^2) d\tau} = \frac{C_{20}}{2(C_{20} - \int_{\tau} \delta y_3^2 d\tau)}, \quad (4)$$

де

$$C = \int_{\tau} \delta(y_1^2 + y_2^2) d\tau,$$

$$A = \int_{\tau} \delta(y_2^2 + y_3^2) d\tau,$$

$$B = \int_{\tau} \delta(y_1^2 + y_3^2) d\tau.$$

Для запису (4) у планетарній системі координат використаємо запис потенціалу рядом за многочленами Лежандра та кульовими функціями [1]:

$$V = \frac{G}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\tau} \delta \left(\frac{\rho}{R} \right)^n P_n(\cos \gamma) d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} V_n, \quad (5)$$

де γ — кут між радіусом-вектором точки (x_1, x_2, x_3) та (ξ, η, ζ) ,

$$\cos \gamma = \frac{\xi x_1 + \eta x_2 + \zeta x_3}{\rho R},$$

R — радіус сфери для збіжності.

Другий член рівності (5) у прямокутній системі координат $Ox_1x_2x_3$ набуде вигляду [18, 19]

$$V_2 = \frac{GM}{2R^4} [x_1^2(-C_{20} + 6C_{22}) - x_2^2(C_{20} + 6C_{22}) + 2C_{20}x_3^2 + 6C_{21}x_1x_3 + 6S_{21}x_2x_3 + 12S_{22}x_1x_2], \quad (6)$$

де

$$C_{20} = \frac{1}{MR^2} \int_{\tau} \delta \left(\zeta^2 - \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) \right) d\tau,$$

$$C_{22} = \frac{1}{4MR^2} \int_{\tau} \delta(\xi^2 - \eta^2) d\tau,$$

$$C_{21} = \frac{1}{MR^2} \int_{\tau} \delta(\zeta\xi) d\tau,$$

$$S_{21} = \frac{1}{MR^2} \int_{\tau} \delta(\zeta\eta) d\tau,$$

$$S_{22} = \frac{1}{MR^2} \int_{\tau} \delta(\xi\eta) d\tau.$$

Доданок V_2 можна записати у матричному вигляді:

$$V_2 = X^T DX,$$

де

$$D = (-C_{20} + 6C_{22} \ 6S_{22} \ 3C_{21} \ 6S_{22} - C_{20} - 6C_{22} \ 3S_{21} \ 3C_{21} \ 3S_{21} \ 2C_{20}),$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad X^T = (x_1, x_2, x_3).$$

Перехід від системи координат $X(Ox_1x_2x_3)$ до $Y(Oy_1y_2y_3)$ визначається перетворенням величини

$$V_2 = Y^T (A^{-1})^T DA^{-1} Y.$$

Матриця D' квадратичної форми в системі координат $Y(Oy_1y_2y_3)$, де $D' = (A^{-1})^T DA^{-1}$ має діагональний вигляд в системі координат, осі якої — головні моменти інерції.

У цьому випадку алгоритм приведення наступний. Визначаємо власні значення матриці D з умови

$$|-C_{20} + 6C_{22} - \lambda \ 6S_{22} \ 3C_{21} \ 6S_{22} - C_{20} - 6C_{22} -$$

$$-\lambda \ 3S_{21} \ 3C_{21} \ 3S_{21} \ 2C_{20} - \lambda| = 0. \quad (7)$$

Тоді розкриття визначника (7) дає рівняння

$$\lambda^3 - p_2 \lambda - p_3 = 0, \quad (8)$$

де

$$p_1 = SP(D) = 0,$$

$$p_2 = 4C_{20}^2 + 9C_{21}^2 + 9S_{21}^2 + 36C_{22}^2 + 36S_{22}^2,$$

$$p_3 = \det(D).$$

Всі власні значення матриці D є дійсними, оскільки вона симетрична, та у тригонометричній формі подаються так [6]:

$$\lambda_1 = 2\sqrt{\frac{p_2}{3}} \cos \frac{\alpha}{3},$$

$$\lambda_2 = -2\sqrt{\frac{p_2}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\lambda_3 = -2\sqrt{\frac{p_2}{3}} \cos \left(\frac{\alpha}{3} - \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\cos \alpha = \frac{p_3}{2\sqrt{\left(\frac{p_2}{3}\right)^3}}.$$

Подібний розв'язок знаходимо в роботі [23], де він представлений у дещо зміненому замкненому вигляді.

Корені рівняння (8) можна шукати наближеними методами, наприклад методом Ньютона [2] або ж за допомогою пакетів прикладних програм [5].

Для визначення зв'язку між системами координат (матриці A) необхідно знайти власні вектори U^i для значень λ_i , які є розв'язками системи рівнянь:

$$(-C_{20} + 6C_{22} - \lambda_i \ 6S_{22} \ 3C_{21} \ 6S_{22} - C_{20} - 6C_{22} - \lambda_i \ 3S_{21} \ 3C_{21} \ 3S_{21} \ 2C_{20} - \lambda_i) \begin{pmatrix} t_1^i \\ t_2^i \\ t_3^i \end{pmatrix} = 0,$$

$$U^i = \begin{pmatrix} t_1^i \\ t_2^i \\ t_3^i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Один зі способів отримання власних векторів матриці D є метод Крилова [2], алгоритм якого записується у вигляді

$$U^i = q_{ji} V^{n-j-i},$$

де

$$q_{0i} = 1, \quad q_{ji} = p_j + \lambda_i q_{j-i},$$

$i = j = 1, 2, 3$, V^0 — довільний вектор, наприклад $V^0 = (111)$, $V^i = DV^{i-1}$. Можна також скориста-

Таблиця 1. Динамічне стиснення планет земної групи

Планета	Земля [16]	Марс [8]	Венера [17]	Місяць [4]
Динамічне стиснення $H \times 10^3$	3.273995	5.220 ± 0.032	0.005225	6.31

Таблиця 2. Стоксові постійні другого порядку

Стоксові постійні	Земля [24]	Марс [22]	Венера [21]	Місяць [20]
$c_{2,0}$	$-4.84169325970501 \cdot 10^{-4}$	$-8.7450441550857710 \cdot 10^{-4}$	$-0.196972335776 \cdot 10^{-5}$	$-0.908835799357 \cdot 10^{-4}$
$c_{2,1}$	$-2.18981004071201 \cdot 10^{-10}$	$9.4588820913966228 \cdot 10^{-11}$	$0.2680268978050000 \cdot 10^{-7}$	$0.247773571021 \cdot 10^{-9}$
$s_{2,1}$	$1.4674516361170 \cdot 10^{-9}$	$-1.1401847225988890 \cdot 10^{-10}$	$0.1324780256340000 \cdot 10^{-7}$	$0.693154521883 \cdot 10^{-9}$
$c_{2,2}$	$2.4393490935020 \cdot 10^{-6}$	$-8.4585751018071385 \cdot 10^{-5}$	$0.8577798458089999 \cdot 10^{-6}$	$0.346733624831 \cdot 10^{-4}$
$s_{2,2}$	$-1.4002848577330 \cdot 10^{-6}$	$4.8905551075504369 \cdot 10^{-5}$	$-0.9553616380009999 \cdot 10^{-7}$	$0.505152152374 \cdot 10^{-10}$

Таблиця 3. Власні числа квадратичних форм

Планета	$\lambda_1 \times 10^3$	$\lambda_2 \times 10^3$	$\lambda_3 \times 10^3$
Земля	-1.0935290247	1.0717420263	-2.1652710551
Марс	2.3338658187	1.5770368207	-3.9109026394
Венера	$7.7477577483 \cdot 10^{-3}$	$1.0620555521 \cdot 10^{-3}$	$-8.8098133004 \cdot 10^{-3}$
Місяць	$3.3751121823 \cdot 10^{-1}$	$6.8932507336 \cdot 10^{-2}$	$-4.0644372557 \cdot 10^{-1}$

тись готовим програмним продуктом з пакету прикладних програм [5].

Використання теоретичних засад методу для визначення основних параметрів планет земної групи. Застосуємо формули та алгоритм для дослідження планет земної групи. Для початку у табл. 1 наведемо динамічне стиснення H , відоме для планет земної групи.

Для подальших обчислень у табл. 2 наведемо параметри гравітаційного поля планет другого порядку.

Знаходимо власні числа квадратичних форм, що відповідають гравітаційному полю небесних тіл, поданих в декартовій системі координат (табл. 3).

Розв'язки задають матрицю зв'язку

$$A = (t_1^1 t_1^2 t_1^3 t_2^1 t_2^2 t_2^3 t_3^1 t_3^2 t_3^3).$$

Результати обчислень власних векторів матриці обома способами подаємо у табл. 4.

Таблиця 4. Власні вектори для чотирьох небесних тіл, що відповідають моделі [24]

	U^1	U^2	U^3
Земля			
t_1^i	-0.96624679	0.25761821	$2.57446493 \cdot 10^{-7}$
t_2^i	0.25761821	0.96624679	$-1.75454422 \cdot 10^{-6}$
t_3^i	$7.00759385 \cdot 10^{-7}$	$1.62899981 \cdot 10^{-6}$	1
Марс			
t_1^i	0.25911845	-0.96584555	$-6.86512412 \cdot 10^{-8}$
t_2^i	0.96584555	0.25911845	$7.33933387 \cdot 10^{-8}$
t_3^i	$-5.30978263 \cdot 10^{-8}$	$-8.53240641 \cdot 10^{-8}$	1
Венера			
t_1^i	-0.99844689	0.05534323	$-6.39862881 \cdot 10^{-3}$
t_2^i	0.05537822	0.99845071	$-5.42598331 \cdot 10^{-3}$
t_3^i	$-6.08842401 \cdot 10^{-3}$	$5.77190056 \cdot 10^{-3}$	0.99996481
Місяць			
t_1^i	1	$-7.28464315 \cdot 10^{-7}$	$-1.28989237 \cdot 10^{-6}$
t_2^i	$7.2845703 \cdot 10^{-7}$	1	$-5.64726522 \cdot 10^{-6}$
t_3^i	$1.28989649 \cdot 10^{-6}$	$5.64726428 \cdot 10^{-6}$	1

Після повороту системи координат матриця D матиме вигляд $D' = (\lambda_1 000 \lambda_2 000 \lambda_3)$, при цьому стоксові постійні другого порядку в новій системі координат запишуться як

$$C'_{20} = \frac{\lambda_3}{2},$$

$$C'_{22} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}.$$

Отримані значення C'_{20} і C'_{22} для наведеного прикладу приведено у табл. 5.

Кути між осями двох систем координат та кути Ейлера ϑ, φ, ψ (див. табл. 6) визначаються за допомогою елементів матриці $A(a_{ij} \equiv t_i^j)$:

$$\gamma = \arccos \frac{a_{33}}{\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2}},$$

$$\beta = \arccos \frac{a_{22}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2}},$$

$$\alpha = \arccos \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2}}.$$

Кути Ейлера ϑ, φ, ψ :

якщо $\vartheta \neq 0$, то

$$\vartheta = \arccos a_{33},$$

$$\psi = \arcsin \left(\frac{a_{13}}{\sin \vartheta} \right), \varphi = \arcsin \left(\frac{a_{31}}{\sin \vartheta} \right);$$

якщо $\vartheta = 0$, то $\psi = \varphi = \beta$.

Результати табл. 6 показують, що найбільший розворот системи координат в горизонтальній площині характерний для Марса, що може свідчити про динамічну нестабільність його фігури. Значно менша величина розвороту для Землі та Венери може бути наслідком їхньої відносної стабільності, хоч для Венери характерне порівняно значне відхилення по осі Z . Не маючи вагомого пояснення цьому факту, можна його

Таблиця 5. Значення стоксових постійних другого порядку

Планета	C_{20}		C_{22}	
	$Ox_1x_2x_3$	$Oy_1y_2y_3$	$Ox_1x_2x_3$	$Oy_1y_2y_3$
Земля	$-1.08263552549 \cdot 10^{-3}$	$-1.0826355255 \cdot 10^{-3}$	$1.57459306912 \cdot 10^{-6}$	$5.4467496079 \cdot 10^{-6}$
Марс	$-1.955451319701 \cdot 10^{-3}$	$-1.9554513197 \cdot 10^{-3}$	$-5.459986750324 \cdot 10^{-5}$	$1.892072495 \cdot 10^{-4}$
Венера	$-4.40443532482 \cdot 10^{-6}$	$-4.4049066502 \cdot 10^{-6}$	$5.536945095884 \cdot 10^{-7}$	$1.6714255491 \cdot 10^{-6}$
Місяць	$-2.032218627748 \cdot 10^{-4}$	$-2.0322186278 \cdot 10^{-4}$	$2.238155924234 \cdot 10^{-5}$	$6.7144677723 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 6. Значення кутів повороту системи та кути Ейлера для планет земної групи

Небесне тіло	Кути повороту системи координат			Кути Ейлера		
	α	β	γ	ϑ	φ	ψ
Земля	14.929	14.929	$1.016 \cdot 10^{-4}$	$1.016 \cdot 10^{-4}$	0.145	0.395
Марс	105.018	74.982	$5.727 \cdot 10^{-6}$	$5.791 \cdot 10^{-6}$	-0.679	-0.525
Венера	3.194	3.19	0.481	0.481	-0.793	-0.754
Місяць	0	$3.262 \cdot 10^{-4}$	$3.319 \cdot 10^{-4}$	$3.319 \cdot 10^{-4}$	-0.223	0.223

Таблиця 7. Коефіцієнти при тензорах гравітаційного поля

Планета	d_A	d_B	d_C	d_D	d_E	d_F
Земля	1	1	$3.145 \cdot 10^{-12}$	$9.032 \cdot 10^{-13}$	$-5.149 \cdot 10^{-7}$	$3.509 \cdot 10^{-6}$
Марс	1	1	$1.01 \cdot 10^{-14}$	$1.021 \cdot 10^{-14}$	$1.373 \cdot 10^{-7}$	$-1.468 \cdot 10^{-7}$
Венера	1	1	$7.038 \cdot 10^{-5}$	$-6.944 \cdot 10^{-5}$	0.013	0.011
Місяць	1	1	$3.356 \cdot 10^{-11}$	$-1.457 \cdot 10^{-11}$	$2.58 \cdot 10^{-6}$	$1.129 \cdot 10^{-5}$

обґрунтувати недостатньою якістю гравітаційної моделі.

Рівність (2) в розгорнутій формі з урахуванням (3) має вигляд

$$\begin{aligned} y_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 y_2 = \\ &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 y_3 = \\ &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Для отримання рівності (4) використаємо співвідношення (9):

$$\begin{aligned} H &= -C_{20} / \int_{\tau} \delta((b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3)^2 + \\ &+ (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3)^2) d\tau, \end{aligned} \quad (10)$$

$$H = \frac{-C_{20}}{Ad_A + Bd_B + Cd_C + Dd_D + Ed_E + Fd_F}, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} d_A &= b_{11}^2 + b_{21}^2, \\ d_B &= (b_{12}^2 + b_{22}^2), \\ d_C &= b_{13}^2 + b_{23}^2, \\ d_D &= 2(b_{11}b_{12} + b_{21}b_{22}), \\ d_E &= 2(b_{11}b_{13} + b_{21}b_{23}), \\ d_F &= 2(b_{12}b_{13} + b_{23}b_{23}). \end{aligned}$$

Інтегральні вирази, що входять у формули (10) та (4), —

$$\begin{aligned} I_{pqs} &= \frac{1}{Ma_i^N} \int_{\tau} \delta x_1^p x_2^q x_3^s d\tau, \\ I'_{pqs} &= \frac{1}{Ma_i^N} \int_{\tau} \delta y_1^p y_2^q y_3^s d\tau. \quad (12) \\ A &= \frac{1}{Ma_i^2} \int_{\tau} \delta(x_1^2 + x_2^2) d\tau, \\ B &= \frac{1}{Ma_i^2} \int_{\tau} \delta(x_1^2 + x_3^2) d\tau, \\ C &= \frac{1}{Ma_i^2} \int_{\tau} \delta(x_2^2 + x_3^2) d\tau, \\ D &= \frac{1}{Ma_i^2} \int_{\tau} \delta x_1 x_2 d\tau, \\ E &= \frac{1}{Ma_i^2} \int_{\tau} \delta x_1 x_3 d\tau, \end{aligned}$$

$$F = \frac{1}{Ma_i^2} \int_{\tau} \delta x_2 x_3 d\tau$$

називають *степеневими моментами щільності* [3] (вони ж моменти інерції в теоретичній чи небесній механіці [11]). Коефіцієнти при тензорах гравітаційного поля приведено у табл. 7.

Параметри зовнішнього гравітаційного поля до другого порядку включно визначаються сукупністю моментів відповідного порядку (визначають тензор інерції небесного тіла [3, 11]). Тому вираз (10) в позначеннях (11) набуде вигляду [14]:

$$\begin{aligned} H &= C_{20} / \{2[C_{20}(1 + b_{31}^2 + b_{32}^2) + \\ &+ 2C_{22}(b_{31}^2 + b_{32}^2) - (b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2)I_{002} + \\ &+ b_{31}b_{32}S_{22} + 2b_{31}b_{33}C_{21} + 2b_{32}b_{33}S_{21}]\}, \end{aligned} \quad (13)$$

звідки

$$\begin{aligned} I_{002} &= \frac{1}{b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2} [C_{20} / 2H + \\ &+ C_{20}(1 + b_{31}^2 + b_{32}^2) + 2C_{22}(b_{31}^2 + b_{32}^2) + \\ &+ b_{31}b_{32}S_{22} + 2b_{31}b_{33}C_{21} + 2b_{32}b_{33}S_{21}]. \end{aligned}$$

Використавши співвідношення між стоксовими постійними та рештою степеневих моментів другого порядку [6], визначаємо

$$\begin{aligned} I_{200} &= 2C_{22} - C_{20} + I_{002}, \\ I_{020} &= -2C_{22} - C_{20} + I_{002}, \\ I_{101} &= C_{21}, \quad I_{011} = S_{21}, \quad I_{110} = 2S_{22}. \end{aligned}$$

Розглянемо окремих випадок, коли одна з осей двох систем координат збігається з віссю обертання планет, а дві інші розташовані у площині екватора [14]. У центрі систем значення щільності збігаються та можуть бути визначені за методикою, поданою у роботі [15]. Використання такої системи координат дозволяє безпосередньо прив'язувати положення досліджуваних точок з їхнім розміщенням на карті без перетворення. Вигляд формул для динамічного стиснення при переході до цієї системи координат не змінюється. Це впливає з інваріантності стоксових постійних C_{n0} , зокрема C_{20} , а також з формули (4). Тому співвідношення для степеневих моментів є загальноприйнятими формулами

Таблиця 8. Різниці значень щільності $\Delta\delta_2$ у двох системах координат та їхня величина δ_2 у планетарній системі

Відносний радіус ρ	$\varphi = 45^\circ, \lambda = 45^\circ$		$\varphi = 30^\circ, \lambda = 30^\circ$	
	$\delta_2 \times \delta_C, \text{г/см}^3$	$\Delta\delta_2 \times \delta_C, \text{г/см}^3$	$\delta_2 \times \delta_C, \text{г/см}^3$	$\Delta\delta_2 \times \delta_C, \text{г/см}^3$
0	1.9193327	$1.989519660128 \cdot 10^{-11}$	1.9193327	$1.989519660120 \cdot 10^{-11}$
0.1	1.9039788	$2.189966729010 \cdot 10^{-10}$	1.9039316	$1.260166306157 \cdot 10^{-10}$
0.2	1.8579169	$8.163011014751 \cdot 10^{-10}$	1.8577281	$4.443809327675 \cdot 10^{-10}$
0.3	1.7811472	$1.811696809391 \cdot 10^{-9}$	1.7807223	$9.750146365197 \cdot 10^{-10}$
0.4	1.6736696	$3.205518816422 \cdot 10^{-9}$	1.6729143	$1.717838141591 \cdot 10^{-9}$
0.5	1.5354840	$4.997606498015 \cdot 10^{-9}$	1.5343039	$2.672931666476 \cdot 10^{-9}$
0.6	1.3665906	$7.187101647545 \cdot 10^{-9}$	1.3648912	$3.840372956383 \cdot 10^{-9}$
0.7	1.1669893	$9.775833440276 \cdot 10^{-9}$	1.1646762	$5.219672012213 \cdot 10^{-9}$
0.8	0.9366801	$1.276179703737 \cdot 10^{-8}$	0.9336589	$6.81144044997490 \cdot 10^{-9}$
0.9	0.6756630	$1.614707426176 \cdot 10^{-8}$	0.6718398	$6.811440449974 \cdot 10^{-9}$
1	0.3839380	$1.992845643659 \cdot 10^{-8}$	0.3792173	$1.063196365306 \cdot 10^{-8}$

(див., наприклад, роботу [9]). При цьому немає потреби приводити стоксові постійні в систему $Oy_1y_2y_3$, лише для функції розподілу мас 2-го порядку необхідно враховувати доданки з многочленами $W_{110}, W_{101}, W_{011}$ [11, 12], а тому врахування значень S_{21}, C_{21}, S_{22} в обчисленнях [11, 12] можна вважати обґрунтованим.

Для перевірки даного твердження обчислимо коефіцієнти розкладу до другого порядку включно:

$$b_{002} = \frac{7}{2} a_3^2 \delta_C (5I_{002} - I_{000}),$$

$$b_{200} = \frac{7}{2} a_1^2 \delta_C (5I_{200} - I_{000}),$$

$$b_{020} = \frac{7}{2} a_2^2 \delta_C (5I_{020} - I_{000}),$$

$$b_{110} = \frac{35}{2} a_1 a_2 \delta_C I_{110},$$

$$b_{101} = \frac{35}{2} a_1 a_3 \delta_C I_{101},$$

$$b_{011} = \frac{35}{2} a_2 a_3 \delta_C I_{011},$$

$$I_{000} = \delta_C,$$

$$b_{001} = a_3 \delta_C I_{001} = 0,$$

$$b_{010} = a_2 \delta_C I_{010},$$

$$b_{100} = a_1 \delta_C I_{100} = 0.$$

За формулами роботи [9] обчислюємо значення функції модельного розподілу δ_2 [10] у планетарній системі координат та різниці $\Delta\delta_2$ у двох системах координат. Результати обчислень приведено у табл. 8.

Висновки. Запропонований та апробований в роботі метод приведення величин з однієї системи координат в іншу дозволяє представляти динамічне стиснення в довільній системі координат. Елементи матриці зв'язку визначають кутові характеристики: кути повороту та кути Ейлера. Їхній аналіз дає можливість судити про динамічний стан фігури небесного тіла. Подані в статті дослідження підтверджують необхідність використання методики зведення параметрів планети в єдину систему координат для побудови тривимірних моделей щільності планет та дають можливість оцінювання при їхній неузгодженості. Наведений в роботі числовий приклад розкриває деталі можливого використання стоксових постійних гравітаційного поля без попереднього їхнього зведення до головних осей інерції для створення об'ємних структур планети.

ЛІТЕРАТУРА

1. Грушинский Н. П. *Основы гравиметрии*. М.: Наука, 1983. 352 с.
2. Демидович Б. П. *Основы вычислительной математики*. М.: Изд-во Физ.-мат. лит.-ры, 1969. 658 с.
3. Дубошин Г. Н. *Небесная механика: основные задачи и методы*. М.: Наука, 1968. 799 с.
4. Заяць О. С. Автореферат дисертації на здобуття канд. техн. наук. Львів, 2006. 18 с.
5. Кирьянов Д. В. *Mathcad 15/MathcadPrime 1.0*. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
6. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1973. 831 с.
7. Марченко А. Н. Преобразование стоксовых постоянных при вращении координатной системы. *Геодезия, картография и аерофотосъемка*. 1977. № 25. С. 46—55.
8. Мещеряков Г. А., Церклевич А. Л. *Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Марса*. Киев: Наук. думка, 1987. 240 с.
9. Мещеряков Г. А., Фис М. М. Трехмерная и референциальная плотностные модели Земли. *Геофиз. журн.* 1986. **8**, № 4. С. 68—75.
10. Мещеряков Г. А. *Задачи теории потенциала и обобщенная Земля*. М.: Наука, 1991. 216 с.
11. Мещеряков Г. А., Голикова А. В., Дейнека Ю. П. О некоторых новых моделях Земли. *Геофиз. сб. АН УССР*. 1974. № 60. С. 72—80.
12. Мещеряков Г. А., Дейнека Ю. П. Об эллипсоидальном распределении плотности земных недр. *Геофиз. сб. АН УССР*. 1978. № 86. С. 46—53.
13. Фис М. М. Приведення фундаментальних сталих у загальну планетарну систему відліку і використання їх при побудові тривимірних функцій розподілу мас планет. *Вісн. геодезії та картографії*. 2008. № 4. С. 11—13.
14. Фис М. М., Бريدун А. М., Юрків М. І. Алгоритм та основні формули зведення фундаментальних постійних до планетарної системи координат. *Вісник астрон. шк.* 2018. **14**, № 2. С. 56—61.
15. Фис М. М., Зазуляк П. М., Черняга П. Г. Значення та варіації густини у центрі мас еліпсоїдальних планет. *Кинематика и физика небес. тел.* 2013. **29**, № 2. С. 62—68.
16. Яцкив Я. С. *Нутация в системе астрономических постоянных*. Киев, 1980. 59 с.
17. Bursa M., Sima Z. Dynamic and figure parameters of Venus and Mars. *Adv. Space Res.* 1985. **5**, № 8. P. 43—46.
18. Fys M., Brydun A., Yurkiv M. On representation of the internal spherical functions and their derivatives in the planetary coordinate system. *Math. Modeling and Computing*. 2019. **6**, № 2. P. 251—257.
19. Fys M., Brydun A., Yurkiv M. On approach to determine the internal potential and gravitational energy of ellipsoid. *Math. Modeling and Computing*. 2021. **8**, № 3. P. 359—367.
20. Konopliv A., Asmar S., Yuang D. Resent gravity models as a result of the Lunar Prospector mission. *Icarus*. 2001. **150**. P. 1—18.
21. Konopliv A. S., Banerdt W. B., Sjogren W. L. Venus gravity: 180th degree and order model. *Icarus*. 1999. **139**. P. 3—18. <https://doi.org/10.1006/icar.1999.6086>
22. Lemoine F. G. Smith D. D., Rowlands D. E., et al. An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor. *J. Geophys. Res.* 2001. **106**, № E10. P. 23359—23376. <https://doi.org/10.1029/2000JE001426>
23. Marchenko A. N., Schwintzec P. Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions. *J. Geodesy*. 2003. P. 495—509.
24. Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., et al. An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly. *Geophys. Res. Abstracts*. 2008. **10**. P. 2.

REFERENCES

1. Hrushynskyy N. P. (1983). *Basics of gravimetry*. M.: Nauka, 352 p. [in Russian].
2. Demydovych B. P. (1969). *Fundamentals of Computational Mathematics*. M.: Yz-vo F. M. Lyt., 658 p. [in Russian].
3. Duboshyn H. N. (1968). *Celestial mechanics: main tasks and methods*. M.: Nauka, 799 p. [in Russian].
4. Zaiats' O. S. (2006). Abstract of the dissertation for the development of Ph.D. L'viv, 18 p. [in Ukrainian].
5. Kyr'ianov D. V. (2012). *Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0*. SPb.: BKhV-Peterburh, 432 p. [in Russian].
6. Korn H., Korn T. (1973). *Handbook of mathematics for scientists and engineers*. M.: Nauka, 831 p. [in Russian].
7. Marchenko A. N. (1977). Transformation of Stokes constants during rotation of the coordinate system. *Geodesy, cartography and aerial photography*, **25**, 46—55 [in Russian].
8. Mescheriakov H. A., Tserklevych A. L. (1987). *Gravitational field, figure and internal structure of Mars*. Kyiv: Nauk. Dumka, 240 p. [in Russian].
9. Mescheriakov H. A., Fys M. M. (1986) Three-dimensional and reference density models of the Earth. *Geophys. J.*, **8**, № 4, 68—75 [in Russian]
10. Mescheriakov H. A. (1991). *Problems of potential theory and the generalized Earth*. M.: Nauka, 216 p. [in Russian].
11. Mescheriakov H. A., Holykova A. V., Dejneka Yu. P. (1974). About some new models of the Earth. *Geophys. collection of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR*, **60**, 72—80 [in Russian].
12. Mescheriakov H. A., Dejneka Yu. P. (1978). On the ellipsoidal distribution of the density of the earth's interior. *Geophys. coll. Acad. of Sci. of the Ukrainian SSR*, **86**, 46—53 [in Russian].
13. Fys M. M. (2008). Reduction of the fundamental steels of the planetary system in general and their evolution in response to trivial functions of the subdivision of planets. *Bull. Geodesy and Cartography*, **4**, 11—13 [in Russian].
14. Fys M. M., Brydun A. M., Yurkiv M. I. (2018). Algorithm and basic formula for reducing fundamental stationary to the planetary coordinate system. *Bull. Astron. School*, **14**, № 2, 56—61 [in Ukrainian].
15. Fys M. M., Zazuliak P. M., Cherniaha P. H. (2013). Significance and variations of density near the centers of elliptical planets. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies*, **29**, № 2, 62—68 [in Ukrainian].
16. YatskyvYa. S. (1980). *Nutation in the system of astronomical constants*. Kyiv, 59 p. [in Russian].
17. Bursa M., Sima Z. (1985). Dynamic and figure parameters of Venus and Mars. *Adv. Space Res.*, **5**, № 8, 43—46.
18. Fys M., Brydun A., Yurkiv M. (2019). On representation of the internal spherical functions and their derivatives in the planetary coordinate system. *Math. Modeling and Computing*, **6**, № 2, 251—257.
19. Fys M., Brydun A., Yurkiv M. (2021). On approach to determine the internal potential and gravitational energy of ellipsoid. *Math. Modeling and Computing*, **8**, № 3, 359—367.
20. Konopliv A., Asmar S., Yuang D. (2001). Resent gravity models as a result of the Lunar Prospector mission. *Icarus*, **150**, 1—18.
21. Konopliv A. S., Banerdt W. B., Sjogren W. L. (1999). Venus gravity: 180th degree and order model. *Icarus*, **139**, 3—18. <https://doi.org/10.1006/icar.1999.6086>
22. Lemoine F. G. Smith D. D., Rowlands D. E., et al. (2001). An improved solution of the gravity field of Mars (GMM-2B) from Mars Global Surveyor. *J. Geophys. Res.*, **106**, № E10, 23359—23376. <https://doi.org/10.1029/2000JE001426>
23. Marchenko A. N., Schwintzec P. (2003). Estimation of the Earth's tensor of inertia from recent global gravity field solutions. *J. Geodesy*, 495—509.
24. Pavlis N. K., Holmes S. A., Kenyon S. C., et al. (2008). An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008. EGU General Assembly. *Geophys. Res. Abstracts*, **10**, 2.

Стаття надійшла до редакції 11.12.2023

Після доопрацювання 11.12.2023

Прийнято до друку 19.10.2024

Received 11.12.2023

Revised 11.12.2023

Accepted 19.10.2024

M. M. Fys¹, Dr. Sci. in Tech., Professor, Professor at CGM Department

ORCID ID: 0000-0001-8956-2293

E-mail: mykhailo.m.fys@lpnu.ua

A. M. Brydun¹, Ph.D. in Phys&

Math., Docent, Associate Prof. at CGM Department

ORCID ID: 0000-0001-5634-0512

E-mail: andrii.m.brydun@lpnu.ua

I. I. Demkiv¹, Dr. Sci. in Phys&

Math., Professor at CGM Department of OMP

ORCID ID: 0000-0003-4015-8171

E-mail: ihor.i.demkiv@lpnu.ua

T. M. Khometa^{1,2}, Ph.D. in Tech., Senior Lecturer, Department of OMP&

Senior Lecturer of Department of PMiF

ORCID ID:0009-0003-6093-8682

E-mail: taras.m.khometa@lpnu.ua

¹Lviv Polytechnic National University

12, Stepana Bandery Str., Lviv, 79013 Ukraine

²Ukrainian Academy of Printing

19, Pid Holoskom Str., Lviv, 79020 Ukraine

COMPOSITION OF THE FUNDAMENTAL PERMANENT PLANETS OF THE EARTH GROUP INTO A SINGLE PLANETARY COORDINATE SYSTEM

Two groups of quantities characterize planets as celestial bodies: dynamic compression and parameters of the planet's external gravitational field are specified in different coordinate systems. But modern inquiries of natural sciences about the planets, including the Earth, require the joint application of these parameters, which requires their presentation in a single coordinate system. In most cases, the coefficients of the expansion of the gravitational field to this day are brought to the coordinate system associated with the principal axes of the planetary ellipsoid, in which the dynamic compression is assigned. It is more logical to do the opposite: to express the dynamic compression of the planet in its general planetary rectangular coordinate system, leaving the coefficients of the expansion of the gravitational field in a series unchanged. This significantly reduces the number of calculations and errors when reducing to the planetary coordinate system, which is becoming increasingly used in practice due to its use in GPS technologies. The paper presents the formula for the dynamic compression of the planet due to all tensors of the second order of the gravitational field of the celestial bodies of the Earth group of the Solar System. The parameters have been reduced to a single rectangular coordinate system for these planets. For specific models of the gravitational field of the planets, we defined the proportionality coefficients with which the inertia tensors are included. Using the example of the planet Earth, the possibility of application in constructing three-dimensional models of the distribution of masses of the interior of the celestial body up to and including the second order is shown, and a comparison of density value calculations in two different coordinate systems is performed. The comparison results confirmed the correctness of the reduction algorithm into one coordinate system. This approach simplifies the interpretation of the obtained results, as it becomes possible to use the available cartographic materials to visualize the obtained results. This, in turn, makes it possible to connect the peculiarities of the distribution of inhomogeneities of the masses of the planets with the geography of the irregularities of the shape of the celestial body.

Keywords: planetary coordinate system, dynamic compression, gravitational field, mass distribution, density.