https://doi.org/10.15407/knit2024.05.087
УДК 528.2

А. Р. СОГОР, доцент кафедри, канд. техн. наук, доцент
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0084-9552.
ResearcherID: ABI-6288-2020. Scopus Author ID:57224950613
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua
Д. О. МАРЧЕНКО, зав. кафедри , канд. техн. наук
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5321-0189.
ResearcherID: HJI-7657-2023. Scopus Author ID: 57203153570
E-mail**:** dmytro.o.marchenko@lpnu.ua
Х. О. КРИВА, аспірант
ORCID:https://orcid.org/0009-0000-1564-1511.
ResearcherID: KBC-7973-2024
E-mail: khrystyna.o.kryva@lpnu.ua

Національний університет «Львівська політехніка»
вул. Степана Бандери 12, Львів, Україна, 79013

ОБЧИСЛЕННЯ РЕГІОНАЛЬНОГО ЕЛІПСОЇДА ДЛЯ УКРАЇНИ ТА ЙОГО ЕФЕКТИВНІСТЬ

Новизна та актуальність наукових рішень полягає у необхідності побудови національної референц-системи, а саме визначення параметрів регіонального еліпсоїда. Методологія такого наукового дослідження полягає в тому, що задача визначення регіонального еліпсоїда практично зводиться до знаходження поправок до прийнятого загального земного еліпсоїда GRS80. Регіональний еліпсоїд для території України повинен бути таким, який би найкраще описував геоїд (квазігеоїд) даного регіону. Тобто, висоти геоїда відносно регіонального еліпсоїда у межах території України повинні бути якомога меншими.

Метою статті є отримання параметрів регіонального еліпсоїда для території України та дослідження ефективності такої референц-системи при розв'язуванні деяких практичних та наукових задач геодезії.

На основі результатів досліджень можна зауважити наступне. Визначення всіх п'яти параметрів регіонального еліпсоїда пов'язане із сильною функціональною залежністю параметрів між собою. Ця залежність (кореляція) досить добре демонструється на значеннях середніх квадратичних похибок, які співрозмірні з отриманими параметрами і навіть перевищують останні. При цьому найсильніша кореляція виникає між поправкою до великої півосі еліпсоїда та лінійними елементами зміщення його центра в тілі Землі. Тобто, спільне знаходження всіх п'яти параметрів методом найменших квадратів для території України не дає хороших результатів. Це добре видно із обчислень висот геоїда, представлених у вигляді сфероїдальної трапеції, яка описує територію України. На відміну від такого розв'язку, дослідження з визначення тільки трьох параметрів зміщення еліпсоїда при заданих його розмірах дають можливість досить добре підібрати такий регіональний еліпсоїд, який би найкраще описував геоїд (квазігеоїд), побудований для території України. Розв'язок цих задач продемонстрував дуже відмінні між собою результати, що були одержані за одними і тими ж даними для однієї і тієї ж території. Це наводить нас на думку про необхідність додаткових досліджень щодо одержання коректних розв'язків так званих нестійких або погано зумовлених задач.

Ключові слова: *велика піввісь еліпсоїда; загальний земний еліпсоїд; параметри еліпсоїда; регіональний еліпсоїд; референц-система; стиснення еліпсоїда.*

Цитування: Согор А. Р., Марченко Д. О., Крива Х. О. Обчислення регіонального еліпсоїда для України та його ефективність. *Космічна наука і технологія*. 2024. **30**, № 5 (150). С. 87—95. https://doi.org/10.15407/knit2024.05.087

ВСТУП

Як відомо, результати геодезичних вимірювань, які проводяться на земній поверхні для визначення взаємного положення пунктів, стосуються різних рівневих поверхонь Землі. Те ж саме можна сказати і про результати астрономічних спостережень у різних точках поверхні Землі. Тому результати геодезичних та астрономічних визначень повинні бути приведені до однієї рівневої поверхні Землі, тобто до поверхні геоїда [1, 5, 8].

Однак дана поверхня геоїда має досить складну форму. Зрозуміло, що складна поверхня не може служити координатною поверхнею для визначення взаємного положення геодезичних пунктів. При математичному опрацюванні результатів астрономо-геодезичних вимірювань поверхня геоїда, як правило, заміняється відомою і більш простою поверхнею відносності, а саме: поверхнею деякого еліпсоїда, який має відповідні розміри та займає певне положення в тілі Землі. Такий еліпсоїд обертання прийнято називати референц-еліпсоїдом. Розміри референц-еліпсоїда та його положення або орієнтування в тілі Землі повинні бути встановлені таким чином, щоб його поверхня тією чи іншою мірою була близькою до поверхні геоїда [4].

Взагалі для обробки геодезичної інформації можна застосовувати будь-який референц-еліпсоїд, який з відповідною точністю описує узагальнену фігуру Землі. За відхиленнями геоїда від такого еліпсоїда можна визначити поправки, які потрібно внести до результатів геодезичних вимірювань для приведення останніх до поверхні цього еліпсоїда. Однак при великих відхиленнях геоїда від референц-еліпсоїда мають місце великі відповідні їм редукції геодезичних вимірювань, обтяжені значними похибками внаслідок лінеаризації основної задачі геодезії і, як наслідок, задачі приведення геодезичних вимірювань на еліпсоїд. Отже, з практичної точки зору для зменшення впливу згаданих похибок лінеаризації та одержання методологічно оптимальних результатів опрацювання геодезичних даних доцільно і навіть необхідно використовувати такий референц-еліпсоїд, який найкращим чином описує узагальнену поверхню геоїда в регіоні конкретних геодезичних робіт.

З огляду на сказане вище виникає питання про національну референц-систему координат, оскільки така система має деякі переваги перед загальноземною системою у процесі практичної обробки масових геодезичних вимірювань, особливо лінійних. У зв’язку з цим питання побудови національної референц-системи, а саме визначення параметрів регіонального еліпсоїда, є досить важливими і актуальними.

Дослідженнями з визначення параметрів загального земного еліпсоїда займалися такі вчені, як Д. В. Загребін [2], Г. О. Мещеряков [3], М. С. Молоденський [4], Г. Моріц [5, 8]. Однак питання з обчислення параметрів регіонального референц-еліпсоїда, який би найкраще за принципом найменших квадратів підходив для поверхні території України, залишається відкритим.

Розміри референц-еліпсоїда характеризуються, як правило, величинами його великої півосі і полярного стиснення, а положення його в тілі Землі переважно визначається складовими відхилення важка у площині меридіана та першого вертикала від нормалі до його поверхні і висотою геоїда в якій-небудь одній точці, яка приймається за вихідний (початковий) пункт геодезичних вимірів. При цьому напрям лінії важка у вихідному пункті відносно основних координатних площин (тобто площин земного екватора і початкового меридіана) встановлюється шляхом астрономічних визначень його широти і довготи. Шляхом виправлення астрономічної широти і довготи вихідного пункту за відхилення лінії важка від нормалі до поверхні референц-еліпсоїда в цьому ж пункті визначаються його геодезична широта і довгота, які разом із висотою геоїда в даному вихідному пункті служать так званими вихідними геодезичними датами для обробки геодезичних вимірювань на поверхні прийнятого референц-еліпсоїда [1, 3, 4].

Методологія нашого наукового дослідження полягає в тому, що задача визначення регіонального еліпсоїда практично зводиться до знаходження поправок Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz до відомого прийнятого нами загального земного еліпсоїда (наприклад GRS80 або WGS84). Регіональний еліпсоїд для території України повинен бути таким, який би найкраще представляв геоїд (квазігеоїд) даного регіону. Тобто, висоти геоїда відносно регіонального еліпсоїда в межах території України повинні бути якомога меншими.

Мета наших досліджень полягає у проведенні обчислень параметрів регіонального еліпсоїда для території України та у здійсненні оцінки ефективності такої референц-системи при розв'язуванні деяких практичних та наукових задач геодезії.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо задачу визначення параметрів регіонального еліпсоїда відносно відомого прийнятого загального земного еліпсоїда WGS84 на базі відомих в геодезії формул параметричного методу сумісного зрівноваження вимірюваних величин.

Під визначенням регіонального еліпсоїда тут будемо розуміти знаходження його параметрів: великої півосі a, полярного стиснення α та прямокутних координат x_0, y_0, z_0 його центра в тілі Землі. Зв'язок цих величин можна зобразити у вигляді скороченої формули перетворення Молоденського для геодезичної висоти [4]:

$$\Delta H = \Delta x \cos \overline{B} \cos \overline{L} + \Delta y \cos \overline{B} \sin \overline{L} + $$
$$+ \Delta z \sin \overline{B} + (\overline{a} \Delta\alpha + \overline{\alpha} \Delta a) \sin^2 \overline{B} + \Delta a . \quad (1)$$

Формула (1), як неважко зауважити, дає зв'язок не самих параметрів, а зміщень параметрів Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz, тобто поправок, які є різницями параметрів деяких двох еліпсоїдів. У цій формулі ΔH — різниця геодезичних висот певної точки на поверхні Землі відносно кожного з двох еліпсоїдів. Практично цю величину можна записати як [2]

$$\Delta H = N - \overline{N} , \quad (2)$$

де N і $\overline{N}$ — висоти геоїда (квазігеоїда) відносно кожного з еліпсоїдів.

Отже, щоб знайти необхідні параметри a, α, x_0, y_0, z_0 деякого еліпсоїда E, потрібно вже мати цілком певний еліпсоїд $\overline{E}$ із відомими параметрами $\overline{a}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$. Тоді

$$\begin{aligned} a &= \overline{a} + \Delta a , \\ \alpha &= \overline{\alpha} + \Delta\alpha , \\ x_0 &= \overline{x}_0 + \Delta x , \\ y_0 &= \overline{y}_0 + \Delta y , \\ z_0 &= \overline{z}_0 + \Delta z . \end{aligned} \quad (3)$$

У принципі можна використовувати будь-який відомий еліпсоїд $\overline{E}$ ($\overline{a}$, $\overline{\alpha}$, $\overline{x}_0$, $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$), але, як ми побачимо нижче, найкраще прийняти саме геоцентричний еліпсоїд. Таким еліпсоїдом може бути, наприклад, добре відомий загальний земний еліпсоїд WGS84. Його параметри такі [7]:

$$\begin{aligned} \overline{a} &= 6378137 \text{ м} , \\ \overline{\alpha} &= 1/298.257223563 , \\ \overline{x}_0 &= 0 , \\ \overline{y}_0 &= 0 , \\ \overline{z}_0 &= 0 . \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді формули (3) можна переписати як

$$\begin{aligned} a &= \overline{a} + \Delta a , \\ \alpha &= \overline{\alpha} + \Delta\alpha , \\ x_0 &= \overline{x}_0 , \\ y_0 &= \overline{y}_0 , \\ z_0 &= \overline{z}_0 . \end{aligned} \quad (5)$$

Як неважко зауважити, всі величини у формулі (1) із рискою зверху — відомі та стосуються системи WGS84, а величини без риски — невідомі. Отже, задача визначення регіонального еліпсоїда практично зводиться до знаходження деяких поправок Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz до відомого, прийнятого нами тут загального земного еліпсоїда WGS84.

Регіональний еліпсоїд для території України повинен бути таким, який би найкраще представляв геоїд (квазігеоїд) даного регіону. Тобто, висоти геоїда N відносно регіонального еліпсоїда у межах території України повинні бути якомога меншими. Враховуючи цю основну вимогу, виконаємо апріорні дослідження з визначення регіонального еліпсоїда для України.

Оскільки нам необхідно визначити п'ять невідомих поправок Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz, то потрібно мати хоча б п'ять точок у межах території України з відомими геодезичними координатами $\overline{B}, \overline{L}, \overline{H}$.

За планові координати $\overline{B}$ і $\overline{L}$ приймемо наближені геодезичні координати вершин сфероїдальної трапеції *ABCD* та її центра *O*, в яку (трапецію) вписується територія України. Тобто

$$\left.\begin{array}{ccc} A\left\{\begin{array}{l} B_A = 52.5^\circ \\ L_A = 21.6^\circ \end{array}\right\} & & B\left\{\begin{array}{l} B_B = 52.5^\circ \\ L_B = 40.0^\circ \end{array}\right\} \\ & O\left\{\begin{array}{l} B_O = 48.3^\circ \\ L_O = 30.8^\circ \end{array}\right\} & \\ D\left\{\begin{array}{l} B_D = 44.1^\circ \\ L_D = 21.6^\circ \end{array}\right\} & & C\left\{\begin{array}{l} B_C = 44.1^\circ \\ L_C = 40.0^\circ \end{array}\right\} \end{array}\right\}. \quad (6)$$

Зауважимо, що хоча геодезичні координати точок *A, B, C, D, O* даються в системі референц-еліпсоїда Ф. М. Красовського, вони є наближеними, тому їх цілком можна вважати такими, що відомі в системі WGS84.

Висоти геоїда $\bar{N}$ відповідних п'яти точок геоїда можна прийняти, наприклад, із розкладу потенціалу сили тяжіння в ряд сферичних функцій. Відома модель GEMT1 (із $n = m = 36$) дає нам такі значення $\bar{N}$ [9]:

$$\left.\begin{array}{ccc} \bar{N}_A = 30.7\,\text{м} & & \bar{N}_B = 9.8\,\text{м} \\ & \bar{N}_O = 25.9\,\text{м} & \\ \bar{N}_D = 43.7\,\text{м} & & \bar{N}_C = 16.5\,\text{м} \end{array}\right\}. \quad (7)$$

Маючи необхідні вихідні дані та використовуючи формулу Молоденського (1), в якій невідомі поправки Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz представлено в лінійному вигляді, запишемо параметричні рівняння для описаних п'яти точок (*A, B, C, D, O*):

$$\begin{cases} a_A\Delta x + b_A\Delta y + c_A\Delta z + d_A\bar{a}\Delta\alpha + e_A\Delta a + l_A = v_A, \\ a_B\Delta x + b_B\Delta y + c_B\Delta z + d_B\bar{a}\Delta\alpha + e_B\Delta a + l_B = v_B, \\ a_C\Delta x + b_C\Delta y + c_C\Delta z + d_C\bar{a}\Delta\alpha + e_C\Delta a + l_C = v_C, \\ a_D\Delta x + b_D\Delta y + c_D\Delta z + d_D\bar{a}\Delta\alpha + e_D\Delta a + l_D = v_D, \\ a_O\Delta x + b_O\Delta y + c_O\Delta z + d_O\bar{a}\Delta\alpha + e_O\Delta a + l_O = v_O, \end{cases} \quad (8)$$

де

$$a_A = \cos B_A \cos L_A, b_A = \cos B_A \sin L_A, c_A = \sin B_A,$$
$$d_A = \sin^2 B_A, e_A = 1 - \bar{\alpha}\sin^2 B_A,\ v_A = N_A;$$
$$a_B = \cos B_B \cos L_B, b_B = \cos B_B \sin L_B, c_B = \sin B_B,$$
$$d_B = \sin^2 B_B, e_B = 1 - \bar{\alpha}\sin^2 B_B,\ v_B = N_B;$$
$$a_C = \cos B_C \cos L_C, b_C = \cos B_C \sin L_C, c_C = \sin B_C, \quad (9)$$
$$d_C = \sin^2 B_C, e_C = 1 - \bar{\alpha}\sin^2 B_C,\ v_C = N_C;$$
$$a_D = \cos B_D \cos L_D, b_D = \cos B_D \sin L_D, c_D = \sin B_D,$$
$$d_D = \sin^2 B_D, e_D = 1 - \bar{\alpha}\sin^2 B_D,\ v_D = N_D;$$
$$a_O = \cos B_O \cos L_O, b_O = \cos B_O \sin L_O, c_O = \sin B_O,$$
$$d_O = \sin^2 B_O, e_O = 1 - \bar{\alpha}\sin^2 B_O,\ v_O = N_O.$$

Праві частини рівнянь (8), як можна зауважити, будуть відігравати роль невідомих поправок. Оскільки система (8) із п'яти рівнянь має десять невідомих величин (Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz, v_A, v_B, v_C, v_D, v_O), то накладемо на неї додаткову умову методу найменших квадратів:

$$\sum v_i^2 \to \min \ (i = A, B, C, D, O), \quad (10)$$

щоб отримати єдиний розв'язок.

Використовуючи формули (9), знайдемо спочатку коефіцієнти параметричних рівнянь поправок (8). Результати запишемо в табл. 1.

Тоді вільні члени параметричних рівнянь поправок (8) згідно з формулою (1) можна записати як

$$l_A = \bar{N}_A, l_B = \bar{N}_B, l_C = \bar{N}_C, l_D = \bar{N}_D, l_O = \bar{N}_O. \quad (11)$$

Підставляючи замість висот геоїда $\bar{N}_i$ їхні значення (7), отримаємо значення вільних членів:

$$l_A = 30.7\,\text{м},\ l_B = 9.8\,\text{м},\ l_C = 16.5\,\text{м},$$
$$l_D = 43.7\,\text{м},\ l_O = 25.9\,\text{м}. \quad (12)$$

Приймаючи значення коефіцієнтів із табл. 1 та значення вільних членів із виразу (12), ми розв'язали систему параметричних рівнянь поправок (8) під умовою найменших квадратів (10) і отримали шукані параметри та їхні середні квадратичні похибки:

$$\Delta x = -5 \pm 28\,\text{м},\ \Delta y = -136 \pm 17\,\text{м},\ \Delta z = 982 \pm 549\,\text{м},$$
$$\bar{a}\Delta\alpha = 783 \pm 393\,\text{м},\ \Delta a = -222 \pm 170\,\text{м}. \quad (13)$$

Отримані апріорні значення параметрів регіонального еліпсоїда та їхні похибки вказують на досить сильну залежність (кореляцію) між невідомими величинами. Щоби виявити, які саме величини найбільше корелюють між собою, потрібно виконати деякі додаткові дослідження з обчислення шуканих параметрів.

Визначення параметрів Δx, Δy, Δz. Припустимо, що параметри Δa та $\Delta\alpha$ є відомими, і будемо шукати лише лінійні елементи орієнтування Δx, Δy, Δz регіонального еліпсоїда. Тобто, параметричні рівняння будуть мати вигляд

$$\begin{cases} a_A\Delta x + b_A\Delta y + c_A\Delta z + l_A^I = v_A, \\ a_B\Delta x + b_B\Delta y + c_B\Delta z + l_B^I = v_B, \\ a_C\Delta x + b_C\Delta y + c_C\Delta z + l_C^I = v_C, \\ a_D\Delta x + b_D\Delta y + c_D\Delta z + l_D^I = v_D, \\ a_O\Delta x + b_O\Delta y + c_O\Delta z + l_O^I = v_O, \end{cases} \quad (14)$$

а вільні члени запишуться таким чином:

$$\begin{aligned} l_A^I &= (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_A + \Delta a + \bar{N}_A, \\ l_B^I &= (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_B + \Delta a + \bar{N}_B, \\ l_C^I &= (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_C + \Delta a + \bar{N}_C, \\ l_D^I &= (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_D + \Delta a + \bar{N}_D, \\ l_O^I &= (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_O + \Delta a + \bar{N}_O. \end{aligned} \quad (15)$$

Відповідні коефіцієнти системи (14) виберемо із табл. 1. Для обчислення вільних членів (15) потрібно ввести деякі числові значення для поправок Δa, $\Delta\alpha$, за які можемо прийняти параметри зміщення Європейської геодезичної референцної системи у Світовій Геодезичній Системі WGS84 [7]:

$$\Delta a = 251 \text{ м}, \ \Delta\alpha = 0.14192702 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta x = -87 \text{ м}, \ \Delta y = -98 \text{ м}, \ \Delta z = -121 \text{ м}. \quad (16)$$

Підставляючи ці значення Δa і $\Delta\alpha$ у формули (15), обчислимо за формулою (15) значення вільних членів:

$$l_A^I = -162.8 \text{ м}, \ l_B^I = -183.7 \text{ м}, \ l_C^I = -190.3 \text{ м},$$

$$l_D^I = -163.1 \text{ м}, \ l_O^I = -174.2 \text{ м}. \quad (17)$$

Таблиця 1. **Обчислення коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок**

Точки	Величина	Значення	Величина	Значення	Коефіцієнт	Значення
A	$\cos B_A$	0.608761	$\cos B_A \cos L_A$	0.5660113	a_A	–0.5660113
	$\cos L_A$	0.929776	$\cos B_A \sin L_A$	0.2241001	b_A	–0.2241001
	$\sin B_A$	0.793353	$\sin^2 B_A$	0.6294089	c_A	–0.793353
	$\sin L_A$	0.368125			d_A	0.6294089
					e_A	–0.9978897
B	$\cos B_B$	0.608761	$\cos B_b \cos L_b$	0.4663377	a_B	–0.4663377
	$\cos L_B$	0.766044	$\cos B_B \sin L_B$	0.3913042	b_B	–0.3913042
	$\sin B_B$	0.793353	$\sin^2 B_B$	0.6294089	c_B	–0.793353
	$\sin L_B$	0.642788			d_B	0.6294089
					e_B	–0.9978897
C	$\cos B_C$	0.718126	$\cos B_C \cos L_C$	0.5501161	a_C	–0.5501161
	$\cos L_C$	0.766044	$\cos B_C \sin L_C$	0.4616027	b_C	–0.4616027
	$\sin B_C$	0.695913	$\sin^2 B_C$	0.4842949	c_C	–0.695913
	$\sin L_C$	0.642788			d_C	0.4842949
					e_C	–0.9983762
D	$\cos B_D$	0.718126	$\cos B_D \cos L_D$	0.6676963	a_D	–0.6676963
	$\cos L_D$	0.929776	$\cos B_D \sin L_D$	0.2643601	b_D	–0.2643601
	$\sin B_D$	0.695913	$\sin^2 B_D$	0.4842949	c_D	–0.6959130
	$\sin L_D$	0.368125			d_D	0.4842949
					e_D	–0.9983762
O	$\cos B_O$	0.665230	$\cos B_O \cos L_O$	0.5714059	a_O	–0.5714059
	$\cos L_O$	0.858960	$\cos B_O \sin L_O$	0.3406263	b_O	–0.3406263
	$\sin B_O$	0.746638	$\sin^2 B_O$	0,5574683	c_O	–0.746638
	$\sin L_O$	0.512043			d_O	0.5574683
					e_O	–0.9981309

Тоді, маючи відповідні значення коефіцієнтів із табл. 1 та вільних членів із виразу (17), розв'яжемо систему параметричних рівнянь (14) під умовою найменших квадратів (10). Невідомі величини та їхні середні квадратичні похибки виявилися такими:

$$\Delta x = -58 \pm 9 \text{ м},$$
$$\Delta y = -167 \pm 8 \text{ м}, \tag{18}$$
$$\Delta z = -115 \pm 8 \text{ м}.$$

Визначення параметрів Δx, Δy, Δz, Δa. Нехай нам відома тільки величина $\Delta\alpha$. Необхідно знайти параметри Δx, Δy, Δz, Δa. Параметричні рівняння в такому випадку набудуть вигляду

$$\begin{cases} a_A\Delta x + b_A\Delta y + c_A\Delta z + e_A\Delta a + l_A^{II} = v_A, \\ a_B\Delta x + b_B\Delta y + c_B\Delta z + e_B\Delta a + l_B^{II} = v_B, \\ a_C\Delta x + b_C\Delta y + c_C\Delta z + e_C\Delta a + l_C^{II} = v_C, \\ a_D\Delta x + b_D\Delta y + c_D\Delta z + e_D\Delta a + l_D^{II} = v_D, \\ a_O\Delta x + b_O\Delta y + c_O\Delta z + e_O\Delta a + l_O^{II} = v_O, \end{cases} \tag{19}$$

а вільні члени —

$$\begin{aligned} l_A^{II} &= \bar{a}\sin^2 B_A\Delta\alpha + \bar{N}_A, \\ l_B^{II} &= \bar{a}\sin^2 B_B\Delta\alpha + \bar{N}_B, \\ l_C^{II} &= \bar{a}\sin^2 B_C\Delta\alpha + \bar{N}_C, \\ l_D^{II} &= \bar{a}\sin^2 B_D\Delta\alpha + \bar{N}_D, \\ l_O^{II} &= \bar{a}\sin^2 B_O\Delta\alpha + \bar{N}_O. \end{aligned} \tag{20}$$

Тоді коефіцієнти системи (19) можна взяти із табл. 1. А вільні члени (20), якщо прийняти величину $\Delta\alpha$ із виразу (16), після нескладних обчислень будуть мати значення

$$l_A^{II} = 87.7 \text{ м}, l_B^{II} = 66.8 \text{ м}, l_C^{II} = 60.3 \text{ м},$$
$$l_D^{II} = 87.5 \text{ м}, l_O^{II} = 76.4 \text{ м}. \tag{21}$$

Таким чином, враховуючи відповідні значення із табл. 1 та із виразу (21), розв'яжемо систему параметричних рівнянь (19) під умовою (10). Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta x &= 110 \pm 89 \text{ м}, \\ \Delta y &= -67 \pm 53 \text{ м}, \\ \Delta z &= 101 \pm 115 \text{ м}, \\ \Delta a &= -39 \pm 154 \text{ м}. \end{aligned} \tag{22}$$

Визначення параметрів Δx, Δy. Нехай величини Δa, $\Delta\alpha$, Δz відомі, і потрібно знайти величини Δx, Δy. Параметричні рівняння поправок тоді запишуться як

$$\begin{cases} a_A\Delta x + b_A\Delta y + l_A^{III} = v_A, \\ a_B\Delta x + b_B\Delta y + l_B^{III} = v_B, \\ a_C\Delta x + b_C\Delta y + l_C^{III} = v_C, \\ a_D\Delta x + b_D\Delta y + l_D^{III} = v_D, \\ a_O\Delta x + b_O\Delta y + l_O^{III} = v_O. \end{cases} \tag{23}$$

Коефіцієнти в рівняннях (23), як і у попередніх випадках, можна вибрати із табл. 1. Вільні члени системи (23), як неважко зауважити, матимуть вигляд

$$\begin{aligned} l_A^{III} &= \sin B_A\Delta z + (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_A + \Delta a + \bar{N}_A, \\ l_B^{III} &= \sin B_B\Delta z + (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_B + \Delta a + \bar{N}_B, \\ l_C^{III} &= \sin B_C\Delta z + (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_C + \Delta a + \bar{N}_C, \\ l_D^{III} &= \sin B_D\Delta z + (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_D + \Delta a + \bar{N}_D, \\ l_O^{III} &= \sin B_O\Delta z + (\bar{a}\Delta\alpha + \bar{\alpha}\Delta a)\sin^2 B_O + \Delta a + \bar{N}_O. \end{aligned} \tag{24}$$

Якщо прийняти значення $\bar{a}$ та $\bar{\alpha}$ із виразу (4), а значення Δa, $\Delta\alpha$, Δz — із виразу (16), то вільні члени після нескладних обчислень будуть дорівнювати

$$l_A^{III} = -66.8 \text{ м}, l_B^{III} = -87.7 \text{ м}, l_C^{III} = -106.0 \text{ м},$$
$$l_D^{III} = -78.8 \text{ м}, l_O^{III} = -83.8 \text{ м}. \tag{25}$$

Тоді, розв'язавши параметричні рівняння (23) під умовою (10), одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta x &= -52 \pm 4 \text{ м}, \\ \Delta y &= -164 \pm 6 \text{ м}. \end{aligned} \tag{26}$$

Визначення параметрів Δx, Δa. Нехай нам задано величини Δy, Δz і $\Delta\alpha$. Необхідно знайти величини Δx та Δa. Тоді параметричні рівняння (8) будуть мати такий вигляд:

$$\begin{cases} a_A\Delta x + e_A\Delta a + l_A^{IV} = v_A, \\ a_B\Delta x + e_B\Delta a + l_B^{IV} = v_B, \\ a_C\Delta x + e_C\Delta a + l_C^{IV} = v_C, \\ a_D\Delta x + e_D\Delta a + l_D^{IV} = v_D, \\ a_O\Delta x + e_O\Delta a + l_O^{IV} = v_O, \end{cases} \tag{27}$$

де

$$l_A^{IV} = \cos B_A \sin L_A\Delta y + \sin B_A\Delta z + \bar{a}\sin^2 B_A\Delta\alpha + \bar{N}_A,$$

$$l_B^{IV} = \cos B_B \sin L_B \Delta y + \sin B_B \Delta z + \bar{a} \sin^2 B_B \Delta\alpha + \bar{N}_B ,$$
$$l_C^{IV} = \cos B_C \sin L_C \Delta y + \sin B_C \Delta z + \bar{a} \sin^2 B_C \Delta\alpha + \bar{N}_C , \tag{28}$$
$$l_D^{IV} = \cos B_D \sin L_D \Delta y + \sin B_D \Delta z + \bar{a} \sin^2 B_D \Delta\alpha + \bar{N}_D ,$$
$$l_O^{IV} = \cos B_O \sin L_O \Delta y + \sin B_O \Delta z + \bar{a} \sin^2 B_O \Delta\alpha + \bar{N}_O .$$

Підставивши у формули (28) значення відповідних величин із виразів (4), (6), (7) та (16), отримаємо

$$l_A^{IV} = 205.6 \text{ м}, \; l_B^{IV} = 201.1 \text{ м}, \; l_C^{IV} = 189.8 \text{ м},$$
$$l_D^{IV} = 197.7 \text{ м}, \; l_O^{IV} = 200.1 \text{ м}. \tag{29}$$

Прийнявши коефіцієнти із табл. 1 та вільні члени із виразу (29), розв'яжемо систему параметричних рівнянь поправок (27) під умовою найменших квадратів (10). Тоді отримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta x &= -10 \pm 47 \text{ м}, \\ \Delta a &= 205 \pm 27 \text{ м}. \end{aligned} \tag{30}$$

Визначення параметрів Δy, Δa. Припустимо, що нам відомі величини Δx, Δz і $\Delta\alpha$. Використовуючи систему рівнянь (8), знайдемо величини Δy та Δa. У цьому випадку параметричні рівняння поправок мають вигляд

$$\begin{cases} b_A \Delta y + e_A \Delta a + l_A^V = v_A, \\ b_B \Delta y + e_B \Delta a + l_B^V = v_B, \\ b_C \Delta y + e_C \Delta a + l_C^V = v_C, \\ b_D \Delta y + e_D \Delta a + l_D^V = v_D, \\ b_O \Delta y + e_O \Delta a + l_O^V = v_O, \end{cases} \tag{31}$$

а вільні члени системи рівнянь (31) запишуться як

$$l_A^V = \cos B_A \cos L_A \Delta x + \sin B_A \Delta z + + \bar{a} \sin^2 B_A \Delta\alpha + \bar{N}_A ,$$
$$l_B^V = \cos B_B \cos L_B \Delta x + \sin B_B \Delta z + + \bar{a} \sin^2 B_B \Delta\alpha + \bar{N}_B ,$$
$$l_C^V = \cos B_C \cos L_C \Delta x + \sin B_C \Delta z + + \bar{a} \sin^2 B_C \Delta\alpha + \bar{N}_C , \tag{32}$$
$$l_D^V = \cos B_D \cos L_D \Delta x + \sin B_D \Delta z + + \bar{a} \sin^2 B_D \Delta\alpha + \bar{N}_D ,$$
$$l_O^V = \cos B_O \cos L_O \Delta x + \sin B_O \Delta z + + \bar{a} \sin^2 B_O \Delta\alpha + \bar{N}_O .$$

Приймаючи значення Δx, Δz і $\Delta\alpha$ із виразу (16), будемо мати

$$l_A^V = 232.9 \text{ м}, \; l_B^V = 203.3 \text{ м}, \; l_C^V = 192.4 \text{ м},$$
$$l_D^V = 229.8 \text{ м}, \; l_O^V = 216.4 \text{ м}. \tag{33}$$

Враховуючи коефіцієнти із табл. 1 та вільні члени із виразу (33), розв'яжемо систему рівнянь (31) під умовою найменших квадратів (10):

$$\begin{aligned} \Delta y &= -179 \pm 12 \text{ м}, \\ \Delta a &= 276 \pm 4 \text{ м}. \end{aligned} \tag{34}$$

Визначення параметрів Δz, Δa. Нехай відомі величини Δx, Δy, $\Delta\alpha$. Необхідно обчислити величини Δz, Δa. Параметричні рівняння поправок тоді запишуться у вигляді

$$\begin{cases} c_A \Delta z + e_A \Delta a + l_A^{VI} = v_A, \\ c_B \Delta z + e_B \Delta a + l_B^{VI} = v_B, \\ c_C \Delta z + e_C \Delta a + l_C^{VI} = v_C, \\ c_D \Delta z + e_D \Delta a + l_D^{VI} = v_D, \\ c_O \Delta z + e_O \Delta a + l_O^{VI} = v_O, \end{cases} \tag{35}$$

де

$$l_A^{VI} = \cos B_A \cos L_A \Delta x + \cos B_A \sin L_A \Delta y + + \bar{a} \sin^2 B_A \Delta\alpha + \bar{N}_A ,$$
$$l_B^{VI} = \cos B_B \cos L_B \Delta x + \cos B_B \sin L_B \Delta y + + \bar{a} \sin^2 B_B \Delta\alpha + \bar{N}_B ,$$
$$l_C^{VI} = \cos B_C \cos L_C \Delta x + \cos B_C \sin L_C \Delta y + + \bar{a} \sin^2 B_C \Delta\alpha + \bar{N}_C , \tag{36}$$
$$l_D^{VI} = \cos B_D \cos L_D \Delta x + \cos B_D \sin L_D \Delta y + + \bar{a} \sin^2 B_D \Delta\alpha + \bar{N}_D ,$$
$$l_O^{VI} = \cos B_O \cos L_O \Delta x + \cos B_O \sin L_O \Delta y + + \bar{a} \sin^2 B_O \Delta\alpha + \bar{N}_O .$$

Прийнявши значення величин Δx, Δy і $\Delta\alpha$ із виразу (16), вільні члени набудуть значень

$$l_A^{VI} = 158.9 \text{ м}, \; l_B^{VI} = 145.7 \text{ м}, \; l_C^{VI} = 153.4 \text{ м},$$
$$l_D^{VI} = 171.5 \text{ м}, \; l_O^{VI} = 159.5 \text{ м}. \tag{37}$$

Врахувавши значення відповідних коефіцієнтів із табл. 1 та вільних членів із виразу (37), розв'яжемо систему параметричних рівнянь (35) під умовою методу найменших квадратів (10).

Тоді будемо мати

$$\Delta z = -103 \pm 94 \text{ м},$$
$$\Delta a = 235 \pm 70 \text{ м}. \quad (38)$$

ВИСНОВКИ

Таким чином, на основі результатів проведених вище досліджень можна зауважити таке. Визначення всіх п'яти параметрів регіонального еліпсоїда (вірніше, їхніх поправок Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz), показаних у вигляді результатів (13), пов'язане із сильною функціональною залежністю параметрів між собою. Ця залежність (кореляція) досить добре демонструється на значеннях середніх квадратичних похибок, які є сумірними з отриманими параметрами і навіть перевищують останні. При цьому із порівняння результатів (22), (30), (34) і (38) видно, що найбільша кореляція виникає між такими величинами: Δa та Δx; Δa та Δy; Δa та Δz. З огляду на це можна зробити висновок, що сумісне визначення всіх п'яти параметрів методом найменших квадратів для території України не дає очікуваних хороших результатів. Це добре видно із обчислень (13) за даними висот геоїда, представлених у вигляді сфероїдальної трапеції, яка описує територію України.

На відміну від такого розв'язку, результати (18) свідчать, що визначення тільки трьох параметрів Δx, Δy, Δz при заданих Δa та $\Delta\alpha$ дають можливість досить добре підібрати такий регіональний еліпсоїд, який би найкраще представляв геоїд (квазігеоїд), побудований на територію України.

Отже, перед нами виникають дві різні задачі: а) сумісне визначення параметрів регіонального еліпсоїда Δa, $\Delta\alpha$, Δx, Δy, Δz; б) визначення параметрів зміщення регіонального еліпсоїда Δx, Δy, Δz при умові, що велика піввісь еліпсоїда Δa та стиснення еліпсоїда $\Delta\alpha$ є заданими. Розв'язування цих задач продемонструвало нам дуже відмінні між собою результати, отримані за одними і тими ж даними для однієї і тієї ж території. Це наводить нас на необхідність додаткових досліджень щодо отримання коректних розв'язків так званих нестійких або погано зумовлених задач [6].

ЛІТЕРАТУРА

1. Гоффманн-Велленгоф Б., Мориц Г. *Физическая геодезия*: монография. Под ред. Ю. М. Неймана. М.: Изд-во МИИГАиК, 2007. 426 с.
2. Загребин Д. В. Теория регуляризированного геоида. *Тр. Ин-та теор. астрон*. 1952. № 1. С. 52—61.
3. Мещеряков Г. А., Церклевич А. Л. *Гравитационное поле, фигура и внутреннее строение Марса*: монография. Киев: Наук. думка, 1987. 240 с.
4. Молоденский М. С., Еремеев В. Ф., Юркина М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. *Тр. ЦНИИГАиК*. 1960. Вып. 131. С. 250—251.
5. Мориц Г. *Современная физическая геодезия:* монография. М.: Недра, 1983. 392 с.
6. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики*: учеб. пособие. М.: Наука, 1966. 724 с.
7. Boucher C., Altamimi Z. ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters. *J. Geodesy*. 2001. **75**. P. 613—619.
8. Heiskanen W. and Moritz H. *Physical Geodesy*. San Francisco, California: W. H. Freeman and Company. 1967. 402 p.
9. Lelgemann D. Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data. *Boll. Geold. Sci. Affini*. 1973. **32**. P. 241—250.

REFERENCES

1. Hoffmann-Wellenhof B., Moritz H. (2007). *Physical geodesy*. Moscow (in Russian).
2. Zagrebin D. V. (1952). Theory of regularized geoid. *Trudy ITA*, no. 1, 52—61.
3. Meshcheryakov G. A., TSerklevich A. L. (1987). Gravitational field, figure and internal structure of Mars. Kiyev (in Russian).
4. Molodenskiy M. S., Eremeyev V. F., Yurkina M. I. (1960). Methods for studying the external gravitational field and the figure of the Earth. *Trudy TSNIIGAiK*, **131**, 250—251.
5. Moritz H. (1983) *Advanced physical geodesy*. Moscow (in Russian).
6. Tikhonov A. N., Samarskiy A. A. (1966). *Equations of mathematical physics*. Moscow (in Russian).
7. Boucher C., Altamimi Z. (2001). ITRS, PZ–90 and WGS–84: Current Realizations and the Related Transformation Parameters. *J. Geodesy*, **75**, 613—619.

8. Heiskanen W., Moritz H. (1967). *Physical Geodesy*. San Francisco, California: W. H. Freeman and Company.
9. Lelgemann D. (1973). Spherical Approximation and the Combination of Gravimetric and Satellite Data. *Boll. Geold. Sci. Affini*, **32**, 241—250.

Стаття надійшла до редакції 23.02.2024 *Received 23.02.2024*
Після доопрацювання 23.02.2024 *Revised 23.02.2024*
Прийнято до друку 30.09.2024 *Accepted 30.09.2024*

A. R. Sohor, Ph. D. in Technical Sciences, Associate Prof.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0084-9552
ResearcherID: ABI-6288-2020. Scopus Author ID:57224950613
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua
D. O. Marchenko, Ph. D. in Technical Sciences, Head of the Department of Cartography and Geospatial Modelling
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5321-0189
ResearcherID: HJI-7657-2023. Scopus Author ID: 57203153570
E-mail: dmytro.o.marchenko @lpnu.ua.
K. O. Kryva, Graduate Student
ORCID: https://orcid.org/0009-0000-1564-1511
ResearcherID: KBC-7973-2024
E-mail: khrystyna.o.kryva @lpnu.ua

Lviv Polytechnic National University
12, Stepana Bandery Str., Lviv, 79013 Ukraine

CALCULATION OF THE REGIONAL ELLIPSOID FOR UKRAINE AND ITS EFFICIENCY

The novelty and relevance of scientific solutions lies in the need to build a national reference system, namely, to determine the parameters of the regional ellipsoid. The methodology of such a scientific study consists of the fact that the task of determining the regional ellipsoid practically boils down to finding corrections to the general terrestrial ellipsoid GRS80 adopted by us. The regional ellipsoid for the territory of Ukraine should be the one that would best represent the geoid (quasi-geoid) of the given region. That is, the heights of the geoid relative to the regional ellipsoid within the territory of Ukraine should be as small as possible.

The purpose of the article is to obtain the parameters of the regional ellipsoid for the territory of Ukraine and to study the effectiveness of such a reference system in solving some practical and scientific problems of geodesy.

Thus, based on the results of the above studies, the following can be noted. The determination of all five parameters of the regional ellipsoid is caused by a strong functional dependence of the parameters among themselves. This dependence (correlation) is quite well demonstrated by the mean square error values, which are commensurate with the obtained parameters and even exceed the latter. Moreover, the greatest correlation occurs between the correction to the semimajor axis of the ellipsoid and the linear elements of the displacement of its center in the body of the Earth. Taking into account these remarks, we can conclude that the joint finding of all five parameters by the least squares method for the territory of Ukraine does not give us the expected good results. This is clearly visible from the calculations of geoid heights, presented in the form of a spheroidal trapezoid, which describes the territory of Ukraine. In contrast to such a solution, research on the determination of only three parameters of the displacement of the ellipsoid with its given dimensions makes it possible to quite well choose such a regional ellipsoid that would best represent the geoid (quasi-geoid) built on the territory of Ukraine. Solving these problems showed us very different results obtained from the same data for the same territory. This leads us to the need to conduct additional research on obtaining correct solutions to so-called unstable or ill-conditioned problems.

Keywords: major axis of ellipsoid, geoid, gravitational field of the Earth, Earth ellipsoid, reference ellipsoid parameters, ellipsoid compression.