https://doi.org/10.15407/knit2024.03.071
УДК 528.1

А. Р. СОГОР, доцент кафедри, канд. техн. наук, доцент
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0084-9552
ResearcherID: ABI-6288-2020. Scopus Author ID: 57224950613
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua
І. С. СІДОРОВ, старш. викладач кафедри геодезії
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5634-0512
ResearcherID: AAC-1271-2020. Scopus Author ID: 57212560353
E-mail: ihor.s.sidorov@lpnu.ua
О. М. СМІРНОВА, доцент кафедри, канд. техн. наук, доцент
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3958-2880
ResearcherID: JKH-7065-2023. Scopus Author ID: 57559498700
E-mail: olha.m.smirnova@lpnu.ua

Інститут геодезії Національного університету «Львівська політехніка»
вул. Степана Бандери 12, Львів, Україна, 79013

ЗАСТОСУВАННЯ СИНГУЛЯРНОГО РОЗКЛАДУ МАТРИЦІ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ НЕКОРЕКТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЗАДАЧ

Найбільш надійний метод для обчислення лінійних рівнянь принципу найменших квадратів, який можна використати для розв'язування некоректних геодезичних задач, базується на матричній факторизації, яку називають сингулярним розкладом. Інші методи вимагають менше машинного часу та пам'яті, але вони менш ефективні щодо врахування похибок вихідної інформації, похибок заокруглення та лінійної залежності.

Методологія такого дослідження полягає в тому, що для будь-якої матриці A та будь-яких двох ортогональних матриць U та V існує матриця Σ, яка визначається зі співвідношення $\Sigma = U^T A V$*. Ідея сингулярного розкладу полягає в тому, що належним вибором матриць U та V можна перетворити більшість елементів матриці Σ в нулі та зробити її діагональною з невід'ємними елементами.*

Новизна та актуальність наукових рішень полягає у доцільності застосування сингулярного розкладу матриці при отриманні лінійних рівнянь методу найменших квадратів, який можна використати для розв'язування некоректних геодезичних задач.

Мета наукового дослідження полягає в отриманні стійкого розв'язку параметричних рівнянь поправок до результатів вимірювань у некоректних геодезичних задачах.

На основі виконаних досліджень із застосування методу сингулярного розкладу при розв'язуванні некоректних геодезичних задач можна резюмувати таке. Сингулярним розкладом дійсної матриці $\bar{A}$ *називається будь-яка її факторизація* $\bar{A} = \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T$ *на матрицю з ортогональними стовпцями* $\bar{U}$*, ортогональну матрицю* $\bar{W}$ *та діагональну матрицю* $\bar{\Sigma}$*, елементи якої називаються сингулярними числами матриці* $\bar{A}$*, а стовпці матриць* $\bar{U}$ *та* $\bar{W}$ *— лівими та правими сингулярними векторами. Якщо матриця* $\bar{A}$ *має повний ранг, то її розв'язок буде єдиним та стійким, який можна отримати за*

Цитування: Согор А. Р., Сідоров І. С., Смірнова О. М. Застосування сингулярного розкладу матриці при розв'язуванні некоректних геодезичних задач. *Космічна наука і технологія*. 2024. **30**, № 3 (148). С. 71—79. https://doi.org/10.15407/knit2024.03.071

допомогою різних методів. Але метод сингулярного розкладу, на відміну від інших методів, дає можливість розв'язувати задачі з неповним рангом. Як показують результати досліджень, досить поширений в геодезії метод розв'язування нормальних рівнянь за допомогою послідовного виключення невідомих (метод Гаусса) не дає стійких розв'язків для некоректних геодезичних задач. Тому у випадку погано зумовлених систем рівнянь запропоновано використовувати метод сингулярного розкладу матриці, який в обчислювальній математиці носить назву SVD. Метод сингулярного розкладу SVD дає можливість отримувати стійкі розв'язки як стійких, так і нестійких за своєю природою задач. Така можливість розв'язувати саме некоректні геодезичні задачі пов'язана з застосуванням деякої границі τ, вибір якої можна здійснювати за відносними похибками матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок $\bar{A}$ *та вектора результатів геодезичних вимірювань* $\bar{L}$ *. При цьому розв'язок системи нормальних рівнянь, отриманий методом SVD, буде мати найменшу довжину.*

Таким чином, застосовуючи апарат сингулярного розкладу матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок до результатів геодезичних вимірювань, ми отримали нові формули для оцінки точності методу найменших квадратів при розв'язуванні некоректних геодезичних задач. Виведені формули мають компактний вигляд і дають можливість досить легко обчислити елементи μ *і* Q_X *оцінки точності, практично обходячи складну процедуру обертання матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь.*

Ключові слова: *матрична факторизація, метод найменших квадратів, некоректні геодезичні задачі, оцінка точності, сингулярний розклад матриці.*

ВСТУП

Найбільш надійний метод для обчислення коефіцієнтів в загальній задачі найменших квадратів базується на матричній факторизації, яку називають сингулярним розкладом. Є й інші методи, що вимагають менше машинного часу та пам'яті. Але вони менш ефективні щодо врахування похибок вихідної інформації, похибок заокруглення та лінійної залежності [3].

Сингулярний розклад, чи SVD (Singular Value Decomposition), є потужним обчислювальним засобом для аналізу матриць та задач, пов'язаних з матрицями, який має застосування у багатьох сферах. Цей алгоритм — типовий представник найбільш вживаних в теперішній час алгоритмів для розв'язування різноманітних матричних задач на так звані власні числа, і одночасно може використовуватись у числових методах даних задач [4].

Методологія такого наукового дослідження полягає в тому, що для будь-якої матриці *A* та будь-яких двох ортогональних матриць *U* та *V* існує матриця Σ, яка визначається зі співвідношення $\Sigma = U^T AV$. Якщо елементи u_j та v_j є стовпцями матриць *U* та *V*, то окремі компоненти матриці Σ будуть рівними $\sigma_{ij} = u_i^{\mathrm{T}} A v_j$. Ідея сингулярного розкладу полягає в тому, що належним вибором матриць *U* та *V* можна перетворити більшість елементів σ_{ij} в нулі; можна навіть зробити матрицю Σ *діагональною* з невід'ємними діагональними елементами σ_j . Ключ до правильного використання методу SVD — це введення деякої границі τ, яка відображає точність вихідних даних. Відношення $\sigma_{\max}/\sigma_{\min}$, де $\sigma_{\max}$ — найбільше ненульове сингулярне число, а $\sigma_{\min}$ — найменше ненульове сингулярне число, можна вважати числом зумовленості матриці **A**. Відкидання чисел σ_j , які будуть меншими, ніж границя τ, призводить до зменшення числа зумовленості до значення $\sigma_{\max}/\tau$.

Нарешті можна зауважити, що важливою особливістю методу SVD є здатність виявляти залежність і неоднозначність та знаходити дуже малі сингулярні числа. Цей тип додаткової інформації для задач методу найменших квадратів називають *сингулярним аналізом*. Він застосовується при аналізі складних математичних моделей [4, 10]. Сингулярний розклад має досить давню історію. Фундаментальними у переважній більшості були праці Голуба та його колег Кохана, Бізінгера і Райнша. Зокрема, стаття Голуба та Райнша була опублікована ще у 1971 р. [4]. Автори відомих алгоритмів для матричних власних чисел — Френсіс, Рутісхаузер та Вілкінсон; ці алгоритми були описані у їхніх працях ще у 1965 р. [10]. У своїх працях Лоусон, Хенсон (1974) і Стюарт (1973) розглядають метод SVD та ряд пов'язаних з ним задач [7, 9]. Слід зауважити, що даний метод сингулярного розкладу матриці, який базується на відомому в статистиці аналізі головних компонентів (Principal Component

Analysis), широко висвітлений в сучасних наукових працях [1, 2, 5, 6, 8].

Таким чином, новизна та актуальність наукових рішень полягає у доцільності застосування сингулярного розкладу матриці при отриманні лінійних рівнянь методу найменших квадратів, який можна використати для розв’язування некоректних геодезичних задач.

РОЗВ’ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Нехай A — задана матриця розмірністю $m \times n$, причому $m \geq n$, а b — заданий вектор розмірністю m. Потрібно знайти всі вектори x, для яких

$$Ax = b .$$

Включимо сюди випадок, коли матриця A може бути квадратною та виродженою.

Теоретично є багато різноманітних алгоритмів, які розв’язують дану систему рівнянь. Але в обчислювальній практиці з її неточними результатами вимірювань метод SVD по суті є єдиним відомим методом з високою надійністю отримання розв’язків [3, 4, 7].

Використовуючи сингулярний розклад матриці A, лінійну систему $Ax = b$ можна переписати у вигляді

$$U \Sigma V^T x = b ,$$

звідки

$$\Sigma z = d ,$$

де $z = V^T x$, $d = U^T b$. Система рівнянь $\Sigma z = d$ є діагональною, що значно спрощує її розв’язок. Дану систему можна розкласти на три підсистеми в залежності від значень розмірностей m, n та рангу k, тобто кількості ненульових сингулярних чисел:

$$\sigma_j z_j = d_j \text{, якщо } j \leq n \text{ та } \sigma_j \neq 0 ,$$

$$0 \cdot z_j = d_j \text{, якщо } j \leq n \text{ та } \sigma_j = 0 ,$$

$$0 = d_j \text{, якщо } j > n .$$

Друга підсистема є порожньою, якщо $k = n$; третя підсистема є порожньою, якщо $n = m$.

Рівняння є сумісними, та розв’язок існує в тому і тільки тому випадку, коли $d_j = 0$, а також $\sigma_j = 0$ або $j > n$. Якщо $k < n$, то невідомому параметру z_j, що відповідає нульовому коефіцієнту σ_j, можна присвоїти довільне значення, і також отримати розв’язок. Після повернення до вихідних координат завдяки перетворенню $x = Vz$ довільні компоненти z дають змогу параметризувати множину всіх можливих розв’язків x.

Позначимо через u_j та v_j стовпці матриць U та V. Тоді розклад $A = U \Sigma V^T$ можна записати так:

$$A v_j = \sigma_j u_j, \quad j = 1, \ldots, n .$$

Ядром матриці A є множина векторів x, для яких $Ax = 0$, а *область значень* матриці A — це множина векторів b, для яких система $Ax = b$ має розв’язок. Якщо $\sigma_j = 0$, то $A v_j = 0$, і v_j належить ядру матриці A; якщо ж $\sigma_j \neq 0$, то u_j належить області значень матриці A.

Звідси випливає, що ми можемо отримати повний опис ядра та області значень. Нехай V_0 — система стовпців v_j, для яких $\sigma_j = 0$, а V_1 — система решти стовпців v_j. Нехай U_1 — система стовпців u_j, для яких $\sigma_j \neq 0$, а U_0 — система решти стовпців u_j, включаючи ті, для яких $j > n$. У системі V_0 є $n - k$ стовпців, у системі V_1 — k стовпців і стільки ж у системі U_1, у системі U_0 є $m - k$ стовпців. Отже:

1) V_0 — ортонормований базис для ядра матриці A,

2) V_1 — ортонормований базис для ортогонального доповнення ядра A,

3) U_1 — ортонормований базис для області значень матриці A,

4) U_0 — ортонормований базис для ортогонального доповнення області значень A.

ЛІНІЙНА ЗАДАЧА МЕТОДУ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Розглянемо тепер узагальнення попередньої задачі, але будемо шукати вектори x розмірністю n, для яких Ax лише наближено дорівнює вектору b при умові мінімальної довжини нев’язки. Під нев’язкою тут будемо розуміти вектор розмірністю m, тобто

$$r = Ax - b .$$

Отже, задача полягає у виборі вектора x, який буде мінімізувати довжину нев’язки r (вірніше, квадрат довжини нев’язки)

$$\| r \|^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2 .$$

Таку задачу в статистиці називають задачею *лінійної регресії*. Якщо матриця A має повний ранг, то розв’язок x буде єдиним та стійким. Такий розв'язок можна отримати за допомогою різних методів, відмінних від методу SVD. Але метод SVD, на відміну від інших методів, дає можливість розв'язувати задачі з неповним рангом [3, 4, 10].

Оскільки ортогональні матриці зберігають норму, то

$$||r|| = ||U^T(AVV^Tx - b)|| = ||\Sigma z - d||.$$

Отже, метод SVD зводить загальну задачу найменших квадратів до задачі з діагональною матрицею. Неважко помітити, що вектор z, який мінімізує $\|r\|$, можна виразити співвідношеннями

$$z_j = \frac{d_j}{\sigma_j}, \text{ якщо } \sigma_j \neq 0;$$

$$z_j \text{ довільне, якщо } \sigma_j = 0.$$

Таким чином, k рівнянь діагональної форми розв'язуються точно. Інші рівняння зводяться до того, що вектор-нев'язка буде відмінним від нуля, причому його норма буде рівною $||r||^2 = \sum d_j^2$, де суму беремо по всіх j, для яких $\sigma_j = 0$ або $j > n$. Тоді зворотне перетворення $x = Vz$ дає змогу розв'язати нашу вихідну задачу.

Якщо задача має неповний ранг, то її розв'язок, який мінімізує $\|r\|$, не буде єдиним. У такій ситуації отримуємо єдиний розв'язок, вибираючи $||x||^2 \to \min$. Такого розв'язку можна досягнути, якщо прийняти

$$z_j = 0, \text{ коли } \sigma_j = 0.$$

У випадку повного рангу розв'язок буде єдиним.

Часто на практиці розглядають модифіковані задачі методу найменших квадратів, в яких мінімізується деяка комбінація $\|r\|$ та $\|x\|$, тобто

$$\|r\|^2 + \lambda\|x\|^2 \to \min,$$

де λ — деякий коефіцієнт пропорційності.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ГЕОДЕЗИЧНИХ ЗАДАЧ

Отримані вище лінійні рівняння методу найменших квадратів можна використати для розв'язування некоректних геодезичних задач. Для цього зобразимо рівняння лінійної регресії у вигляді відомих при вирівнюванні геодезичних мереж параметричних рівнянь поправок. Представимо їх у матричній формі:

$$AX + L = V,$$

де A — матриця коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок, елементи якої отримують як часткові похідні деякої функції по невідомих параметрах, X — вектор невідомих величин, які називають параметрами, L — вектор результатів вимірювань, V — вектор поправок до результатів вимірювань.

Дана система рівнянь є недовизначеною, тому вона не має єдиного розв'язку. Із багатьох різноманітних критеріїв для визначення невідомих параметрів X, як ми вже зауважували раніше, використаємо принцип найменших квадратів. Тобто, на систему рівнянь $AX + L = V$ накладемо додаткову умову

$$\Phi = V^T C_{nn}^{-1} V \to \min,$$

де C_{nn}^{-1} — обернена коваріаційна матриця похибок результатів вимірювань.

Щоб оперувати простішими виразами, доцільно скористатися поданням нерівноточних результатів вимірювань у рівноточному вигляді. Якщо підставити в умову мінімуму значення вектора V з параметричних рівнянь поправок, отримаємо

$$\Phi = (AX + L)^T C_{nn}^{-1}(AX + L) \to \min.$$

Розкриваючи дужки, будемо мати

$$\Phi = X^T A^T C_{nn}^{-1} AX + 2X^T A^T C_{nn}^{-1} L + L^T C_{nn}^{-1} L \to \min.$$

Для дійсної симетричної додатно визначеної оберненої коваріаційної матриці C_{nn}^{-1} використаємо таку теорему.

<u>Теорема.</u> Для дійсної симетричної додатно визначеної матриці C_{nn}^{-1} існує така симетрична додатно визначена матриця $C_{nn}^{-1/2}$, що $(C_{nn}^{-1/2})^2 = C_{nn}^{-1}$. При цьому

$$(C_{nn}^{-1/2})^2 = Y\Lambda^{1/2}Y^T \cdot Y\Lambda^{1/2}Y^T = Y\Lambda Y^T = C_{nn}^{-1},$$

де

$$\Lambda^{1/2} \Rightarrow \mathrm{diag}\left\{\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \ldots, \lambda_m^{1/2}\right\}$$

— діагональна матриця власних чисел матриці $C_{nn}^{-1/2}$, а стовпці матриці Y — власні вектори матриці $C_{nn}^{-1/2}$. Скориставшись визначенням даної теореми, умову мінімуму можна записати у вигляді

$$\Phi = X^T A^T C_{nn}^{-1/2} C_{nn}^{-1/2} AX + 2X^T A^T C_{nn}^{-1/2} C_{nn}^{-1/2} L +$$
$$+ L^T C_{nn}^{-1/2} C_{nn}^{-1/2} L \to \min.$$

Якщо ввести позначення

$$\overline{A} = C_{nn}^{-1/2} A, \ \overline{L} = C_{nn}^{-1/2} L, \ \overline{V} = C_{nn}^{-1/2} V,$$

то умова мінімуму остаточно матиме вигляд

$$\Phi = X^T\bar{A}^T\bar{A}X + 2X^T\bar{A}^T\bar{L} + \bar{L}^T\bar{L} = \bar{V}^T\bar{V} \to \min .$$

Як відомо з математичного аналізу, необхідною умовою мінімуму функції Ф є рівність нулеві її часткових похідних, тобто $\partial\Phi / \partial X = 0$. В результаті, вже для випадку рівноточних вимірювань $\bar{L} = C_{nn}^{-1/2}L$, отримуємо систему нормальних рівнянь

$$\bar{A}^T\bar{A}\cdot X + \bar{A}^T\bar{L} = 0 .$$

Невідомі параметри звідси отримуються як

$$X = -(\bar{A}^T\bar{A})^{-1}\cdot\bar{A}^T\bar{L} .$$

Досить поширений в геодезії метод розв'язування нормальних рівнянь за допомогою послідовного виключення невідомих (метод Гаусса) не дає стійких розв'язків для погано зумовлених або некоректних геодезичних задач. Тому у випадку погано зумовлених систем рівнянь бажано використовувати такий метод, який би гарантував стабільний розв'язок. Одним із таких методів може бути сингулярний розклад матриці, який в обчислювальній математиці носить назву SVD [3, 4].

Здійснимо сингулярний розклад матриці $\bar{A}$. Сингулярним розкладом дійсної матриці $\bar{A}$ розмірністю $m\times n$ називається усяка її факторизація вигляду

$$\bar{A} = \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T ,$$

де $\bar{U}$ — матриця з ортогональними стовпцями розмірністю $m\times n$, $\bar{W}$ — ортогональна матриця розмірністю $n\times n$, $\bar{\Sigma}$ — діагональна матриця розмірністю $n\times n$, для якої $\bar{\sigma}_{ij} = 0$ при $i \ne j$ і $\bar{\sigma}_{ij} = \bar{\sigma}_j \ge 0$. Величини $\bar{\sigma}_j$ назвемо сингулярними числами матриці $\bar{A}$, а стовпці матриць $\bar{U}$ і $\bar{W}$ — лівими та правими сингулярними векторами. Для матриць $\bar{U}$ і $\bar{W}$ справедливі такі співвідношення:

$$\bar{U}^T\bar{U} = I ,\ \bar{U}\bar{U}^T \ne I ,$$
$$\bar{W}^T\bar{W} = I ,\ \bar{W}\bar{W}^T = I ,$$

де I — одинична матриця. Підставимо тепер значення сингулярного розкладу матриці $\bar{A}$ в систему нормальних рівнянь, отримаємо

$$(\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T)^T(\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T)\cdot X + (\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T)^T\bar{L} = 0 .$$

Транспонуючи матриці, отримаємо

$$\bar{W}\bar{\Sigma}\bar{U}^T\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T\cdot X + \bar{W}\bar{\Sigma}\bar{U}^T\cdot\bar{L} = 0 .$$

Після скорочень нова система нормальних рівнянь набуде вигляду

$$\bar{W}\bar{\Sigma}\bar{\Sigma}\bar{W}^T\cdot X + \bar{W}\bar{\Sigma}\bar{U}^T\cdot\bar{L} = 0 .$$

Тоді розв'язок такої системи запишеться як

$$X = -(\bar{W}\bar{\Sigma}\bar{\Sigma}\bar{W}^T)^{-1}\bar{W}\bar{\Sigma}\bar{U}^T\cdot\bar{L} .$$

Врахувавши ортогональність матриці $\bar{W}$ та зробивши відповідні скорочення, остаточно отримуємо розв'язок системи нормальних рівнянь:

$$X = -\bar{W}\bar{\Sigma}^{-1}\bar{U}^T\cdot\bar{L} ,$$

де $\bar{\Sigma}^{-1}$ — діагональна матриця, члени якої рівні $1/\bar{\sigma}_j$.

Отже, цей розв'язок дає можливість отримати невідомі параметри *X*, використовуючи сингулярний розклад матриці $\bar{A}$. Зведемо його до еквівалентної діагональної системи

$$\bar{\Sigma}\cdot Z = \bar{D} ,$$

де

$$Z = \bar{W}^T X ,\ \bar{D} = -\bar{U}^T\bar{L} .$$

Якщо всі величини $\bar{\sigma}_j$ є відмінними від нуля, то еквівалентну діагональну систему можна розв'язати, вважаючи

$$z_j = \frac{\bar{d}_j}{\bar{\sigma}_j}, \quad j = 1, \ldots, n ,$$

де z_j — елементи вектора *Z*, $\bar{d}_j$ — елементи вектора $\bar{D}$.

Однак на практиці не завжди є можливим отримати коректний розв'язок такої задачі, якщо деякі величини $\bar{\sigma}_j$ мають малі значення. Згідно із твердженнями, приведеними вище, ми можемо сказати, що всі значення величин $\bar{\sigma}_j$ не будуть дорівнювати нулеві у тому випадку, коли стовпці елементів $\bar{a}_{ij}$ матриці $\bar{A}$ будуть лінійно незалежними.

Як відомо, для отримання коректного розв'язку потрібно ввести деяку границю τ, яка відображає точність вихідних даних, що використовується в геодезичних задачах. Зміни вихідних даних та похибки заокруглень, які є меншими, ніж границя τ, можуть призвести до зовсім іншого набору коефіцієнтів. Для того щоб ці коефіцієнти були по можливості малими, запишемо

$$z_j = 0 \text{, якщо } \bar{\sigma}_j \le \tau .$$

Вибір $z_j = 0$ має особливий зміст. Він призводить до розв'язку, що має серед всіх можливих розв'язків найменшу довжину.

Відношення $\bar{\sigma}_{\max} / \bar{\sigma}_{\min}$ назвемо числом зумовленості матриці $\bar{A}$, тобто

$$\mathrm{cond}(\bar{A}) = \frac{\bar{\sigma}_{\max}}{\bar{\sigma}_{\min}} ,$$

де $\bar{\sigma}_{\max}$ — найбільше, а $\bar{\sigma}_{\min}$ — найменше ненульові сингулярні числа.

Отже, відкинувши числа $\bar{\sigma}_j$, які будуть меншими, ніж границя τ, отримуємо зменшення числа зумовленості до значення $\bar{\sigma}_{\max}/\tau$, тобто

$$\mathrm{cond}(\bar{A}) = \frac{\bar{\sigma}_{\max}}{\tau}.$$

Дослідження показали, що відкидати деякі малі значення $\bar{\sigma}_j$ доцільно в тому випадку, коли число зумовленості матриці $\mathrm{cond}(\bar{A})$ перевищує обернені відносні похибки матриці $\bar{A}$ та вектора вільних членів $\bar{L}$, що є вектором результатів вимірювань геодезичних величин. Тоді отримати стійкий розв'язок нашої задачі можна в тому випадку, якщо буде виконуватись умова

$$\mathrm{cond}(\bar{A}) \le d,$$

де d — знаменник відносних похибок матриці $\bar{A}$ та вектора результатів геодезичних вимірювань $\bar{L}$. Якщо підставити значення $\mathrm{cond}(\bar{A}) = \bar{\sigma}_{\max}/\tau$ у нерівність $\mathrm{cond}(\bar{A}) \le d$, отримаємо

$$\frac{\bar{\sigma}_{\max}}{\tau} \le d.$$

Тоді границю τ можна визначити із умови

$$\tau > \frac{\bar{\sigma}_{\max}}{d}.$$

Таким чином, ми описали проблему розв'язування некоректних геодезичних задач у вигляді системи нормальних рівнянь, що дає можливість, врахувавши вихідну коваріаційну матрицю C_{nn}, отримати досить простий вираз для пошуку невідомих величин X, застосовуючи сингулярний розклад матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь $\bar{A}$. Метод сингулярного розкладу SVD дає можливість отримувати стійкі розв'язки як стійких, так і нестійких за своєю природою задач. Така можливість розв'язувати саме некоректні геодезичні задачі пов'язана із застосуванням деякої границі τ, яка дає змогу не включати у процес обчислення дуже малі сингулярні числа $\bar{\sigma}_j$, і тим самим покращити зумовленість системи нормальних рівнянь. Вибір границі τ можна здійснювати за відносними похибками матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок $\bar{A}$ та вектора результатів геодезичних вимірювань $\bar{L}$. При цьому розв'язок системи нормальних рівнянь, отриманий методом SVD, буде мати найменшу довжину.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ДАНОГО МЕТОДУ

Виведемо формули для отримання оцінки точності при використанні методу сингулярного розкладу. В загальному вигляді середня квадратична похибка будь-якої величини визначається з формули

$$m_X = \mu\sqrt{Q_X},$$

де μ — похибка одиниці ваги, $Q_X = P_X^{-1}$ — обернена вага вектора оцінюваної величини.

Отже, задача оцінки точності розкладається на дві задачі: 1) визначення похибки одиниці ваги, 2) визначення ваги вектора оцінюваної величини. Для визначення похибки одиниці ваги можна скористатись формулою з теорії похибок:

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{V}^T\bar{V}}{m-n}},$$

де $m - n = k$ — кількість надлишково виміряних величин, а добуток матриць $\bar{V}^T\bar{V}$, згідно з формулами попереднього пункту, дорівнює $V^T C_{nn}^{-1} V$. Використовуючи значення функції $\Phi = \bar{V}^T\bar{V}$, виведені вище, та виконавши деякі спрощення, отримаємо

$$\bar{V}^T\bar{V} = X^T(\bar{A}^T\bar{A}X + \bar{A}^T\bar{L}) + \bar{L}^T\bar{A}X + \bar{L}^T\bar{L}.$$

Але вираз у круглих дужках дорівнює нулеві, оскільки він представляє систему нормальних рівнянь. Тому величина $\bar{V}^T\bar{V}$ набуде вигляду

$$\bar{V}^T V = \bar{L}^T\bar{A}X + \bar{L}^T\bar{L}.$$

Тоді, застосовуючи сингулярний розклад матриці $\bar{A}$, дану формулу можна записати у вигляді

$$\bar{V}^T V = \bar{L}^T\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T X + \bar{L}^T\bar{L}.$$

Якщо замінити вектор X його значенням, отриманим із розв'язку системи нормальних рівнянь, то будемо мати

$$\bar{V}^T V = -\bar{L}^T\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T\bar{W}\bar{\Sigma}^{-1}\bar{U}^T\bar{L} + \bar{L}^T\bar{L}.$$

Використовуючи властивості транспонованої, ортогональної та оберненої матриць, величина $\bar{V}^T\bar{V}$ запишеться у вигляді

$$\bar{V}^T V = -\bar{L}^T\bar{U}\bar{U}^T\bar{L} + \bar{L}^T\bar{L}.$$

Тоді середня квадратична похибка одиниці ваги остаточно матиме вигляд

$$\mu = \sqrt{\frac{\bar{L}^T\bar{L} - \bar{L}^T\bar{U}\bar{U}^T\bar{L}}{m-n}}.$$

За обернену вагу Q_X в теорії похибок приймають величину

$$Q_X = (A^T C_{nn}^{-1} A)^{-1}.$$

Згідно із теоремою симетричної додатно визначеної матриці $(C_{nn}^{-1/2})^2 = C_{nn}^{-1}$, сформульованою у попередньому пункті, обернена вага Q_X дорівнює

$$Q_X = (\bar{A}^T \bar{A})^{-1}.$$

Після сингулярного розкладання матриці $\bar{A}$ обернена вага Q_X набуде вигляду

$$Q_X = [(\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T)^{\mathrm{T}}\bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T]^{-1}.$$

Виконавши транспонування та спростивши вираз, запишемо

$$Q_X = [\bar{W}\bar{\Sigma}\bar{\Sigma}W^T]^{-1}.$$

Використовуючи властивості оберненої матриці добутку та ортогональної матриці, остаточно отримаємо обернену вагу вектора оцінюваної величини

$$Q_X = \bar{W}\bar{\Sigma}^{-1}\bar{\Sigma}^{-1}W^T.$$

Таким чином, застосовуючи апарат сингулярного розкладу матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок до результатів геодезичних вимірювань, ми отримали нові формули для оцінки точності методу найменших квадратів при розв'язуванні некоректних геодезичних задач. Виведені формули мають компактний вигляд і дають можливість досить легко обчислити елементи μ і Q_X оцінки точності, практично обходячи складну процедуру обертання матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь.

РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЕНЬ

На основі описаних в роботі теоретичних досліджень виконано обчислення значень параметрів внутрішнього орієнтування для референц-еліпсоїда Землі за даними геодезичних вимірювань різних регіонів території України та акваторії Чорного і Азовського морів. У табл. 1 приведено оцінки, отримані традиційним методом найменших квадратів (МНК) та методом сингулярного розкладу матриці (SVD).

ВИСНОВКИ

На основі виконаних досліджень із застосуванням методу сингулярного розкладу SVD при розв'язуванні некоректних геодезичних задач було з'ясовано таке.

1. Як показали результати досліджень, досить поширений в геодезії метод розв'язування нормальних рівнянь за допомогою послідовного виключення невідомих (метод Гаусса) не дає стійких розв'язків для некоректних геодезичних задач, отриманих на прикладі побудови регіонального земного еліпсоїда.

2. У випадку погано зумовлених систем рівнянь запропоновано використовувати метод сингулярного розкладу матриці, який в обчислювальній математиці носить назву SVD.

Таблиця 1. **Параметри референц-еліпсоїда Землі, визначені методами найменших квадратів та сингулярного розкладу**

РЕГІОН	a, м	$1/\alpha$	Δx, м	Δy, м	Δz, м
			МНК		
Західна Україна	6385940 ± 400	211 ± 11	–7547 ± 342	–3488 ± 154	+3592 ± 967
Північна, східна та південна Україна	6377489 ± 75	293 ± 2	+378 ± 30	+67 ± 19	+881 ± 189
Україна	6377621 ± 78	303 ± 2	+523 ± 20	+172 ± 12	+18 ± 185
Акваторії	6379393 ± 39	316 ± 1	–310 ± 18	–359 ± 12	–2112 ± 108
Україна + акваторії	6378218 ± 13	299.8 ± 0.5	+93 ± 9	–84 ± 6	–191 ± 41
			SVD		
Західна Україна	6378169 ± 1	297.53 ± 0.02	+98 ± 2	–37±4	–22.3±0.9
Північна, східна та південна Україна	6378159 ± 1	297.79 ± 0.01	+119 ± 1	–94±1	–14.5±0.6
Україна	6378160 ± 1	297.78 ± 0.01	+101 ± 1	–71.5±0.9	–14.0±0.6
Акваторії	6378154 ± 1	297.998 ± 0.008	+93.9 ± 0.5	–84.5±0.6	–7.6±0.3
Україна + акваторії	6378154 ± 1	298.011 ± 0.004	+91.6 ± 0.4	–85.0±0.4	–6.4±0.2

Пояснення: a — велика піввісь обчисленого референц-еліпсоїда Землі, α — його полярне стиснення, $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — прямокутні координати центра отриманого референц-еліпсоїда в тілі Землі.

3. Методом сингулярного розкладу SVD було отримано стійкі розв'язки задачі обчислення параметрів референц-еліпсоїда Землі за даними його регіонального гравітаційного поля. Така можливість розв'язувати саме некоректні геодезичні задачі пов'язана із застосуванням деякої границі τ, вибір якої можна здійснювати за відносними похибками матриці коефіцієнтів параметричних рівнянь поправок $\overline{A}$ та вектора результатів геодезичних вимірювань $\overline{L}$. При цьому розв'язок системи нормальних рівнянь, отриманий методом SVD, буде мати найменшу довжину.

4. Ми отримали нові формули для оцінки точності методу сингулярного розкладу SVD при розв'язуванні некоректних геодезичних задач. Виведені формули мають компактний вигляд і дають можливість досить легко обчислити елементи μ і Q_X оцінки точності, практично нехтуючи складною процедурою обертання матриці коефіцієнтів нормальних рівнянь.

REFERENCES

1. Abdi H., Williams L. J. (2010). Principal component analysis. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, **2**, 433—459.
2. Berkooz G., Holmes Ph., Lumley J. L. (1993). The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **25**, 539—575.
3. Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B. (1977). *Computer Methods for Mathematical Computations*. Englewood Cliffs. N. J. Prentice-Hall.
4. Golub G. H., Reinsch C. (1971). *Singular value decomposition and least squares solution*. Handbook for Automatic Computation. Vol. II: Linear Algebra. Eds J. H. Wilkinson, C. Reinsch. Heidelberg: Springer.
5. Gorban A. N., Kegl B., Wunsch D., Zinovyev A. Y. (Eds). (2007). *Principal Manifolds for Data Visualisation and Dimension Reduction*. Ser.: Lecture Notes in Computational Science and Engineering 58. Berlin — Heidelberg — New York: Springer, **XXIV**, 340 p. ISBN 978-3-540-73749-0.
6. Hyvdrinen A., Karhunen J., Oja E. (2001). *Independent Component Analysis*. A Volume in the Wiley Series on and Adaptive Learning Systems for Signal Processing, Communications, and Control. John Wiley & Sons, Inc., XVI+481 p. ISBN 0-471-40540-X.
7. Lawson C. L., Hanson R. J. (1974). *Solving least squares problems*. Englewood Cliffs. N. J. Prentice-Hall.
8. Scholz M., Fraunholz M., Selbig J. (2007). Nonlinear Principal Component Analysis: Neural Network Models and Applications. Eds. A. N. Gorban et al. LNCSE 58, Springer, ISBN 978-3-540-73749-0.
9. Stewart G. W. (1973). *Introduction to Matrix Computation*. New York: Academic Press.
10. Wilkinson J. H. (1965). *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon Press.

Стаття надійшла до редакції 10.01.2024
Після доопрацювання 06.02.2024
Прийнято до друку 07.02.2024

Received 10.01.2024
Revised 06.02.2024
Accepted 07.02.2024

A. Sohor, PhD in Technical Sciences, Associate Professor
ORCID: 0000-0002-0084-9552
ResearcherID: ABI-6288-2020. Scopus Author ID: 57224950613
E-mail: andrii.r.sohor@lpnu.ua
I. Sidorov, Senior Lecturer
ORCID: 0000-0001-5634-0512
ResearcherID: AAC-1271-2020. Scopus Author ID: 57212560353
E-mail: ihor.s.sidorov@lpnu.ua
O. Smirnova, PhD in Technical Sciences, Associate Professor
ORCID: 0000-0003-3958-2880
ResearcherID: JKH-7065-2023. Scopus Author ID: 57559498700
E-mail: olha.m.smirnova@lpnu.ua

Institute of Geodesy Lviv Polytechnic National University
12, Stepana Bandery Str., Lviv, 79013 Ukraine

APPLICATION OF THE SINGULAR DECOMPOSITION OF THE MATRIX IN SOLVING INCORRECT GEODESIC PROBLEMS

The most reliable method for solving linear equations of the least squares principle, which can be used to solve incorrect geodetic problems, is based on matrix factorization, which is called a singular expansion. Some other methods require less machine time and memory. However, they are less effective in taking into account the errors of the source information, rounding errors, and linear dependence.

The methodology of such research is that for any matrix A and any two orthogonal matrices U and V, there is a matrix Σ, which is determined as $\Sigma = U^T A V$. The idea of a singular decomposition is that by choosing the right matrices U and V, you can convert most elements of the matrix Σ to zero and make it diagonal with non-negative elements.

The novelty and relevance of scientific solutions lie in the feasibility of using a singular decomposition of the matrix to obtain linear equations of the least squares method, which can be used to solve incorrect geodetic problems.

The purpose of scientific research is to obtain a stable solution of parametric equations of corrections to the results of measurements in incorrect geodetic problems.

Based on the performed research on the application of the singular decomposition method for solving incorrect geodetic problems, we can summarize the following results. A singular expansion of a real matrix $\bar{A}$ is any factorization $\bar{A} = \bar{U}\bar{\Sigma}\bar{W}^T$ of a matrix with orthogonal columns $\bar{U}$, an orthogonal matrix $\bar{W}$, and a diagonal matrix $\bar{\Sigma}$, the elements of which are called singular numbers of the matrix $\bar{A}$, and the columns of matrices $\bar{U}$ and $\bar{W}$ — left and right singular vectors. If the matrix $\bar{A}$ has a full rank, then its solution will be unique and stable, which can be obtained by different methods. However, the method of singular decomposition, in contrast to other methods, makes it possible to solve problems with incomplete rank. Research shows that the method of solving normal equations by sequential exclusion of unknowns (*Gaussian method*), which is quite common in geodesy, does not provide stable solutions for poorly conditioned or incorrect geodetic problems. Therefore, in the case of unstable systems of equations, it is proposed to use the method of singular matrix decomposition, which in computational mathematics is called *SVD*. The *SVD* singular decomposition method makes it possible to obtain stable solutions to both stable and by nature unstable problems. This possibility to solve incorrect geodetic problems is associated with the application of some limit τ, the choice of which can be made by the relative errors of the matrix of coefficients of parametric equations of corrections $\bar{A}$ and the vector of results of geodetic measurements $\bar{L}$. Moreover, the solution of the system of normal equations obtained by the *SVD* method will have the shortest length.

Thus, applying the apparatus of the singular decomposition of the matrix of coefficients of parametric equations of corrections to the results of geodetic measurements, we obtained new formulas for estimating the accuracy of the least squares method in solving incorrect geodetic problems. The derived formulas have a compact form and allow the easy calculation of elements μ and Q_X estimates of accuracy, almost ignoring the complex procedure of rotation of the matrix of coefficients of normal equations.

***Keywords*:** matrix factorization, least squares method, incorrect geodesic problems, accuracy assessment, singular matrix decomposition.