

<https://doi.org/10.15407/knit2021.02.028>
УДК 629.735.33.015.4:533.6.013.422:629.7.025.1

О. В. САФРОНОВ, пров. наук. співроб., д-р техн. наук, проф., заслужений діяч науки і техніки України
ORCID ID 0000-0001-7420-0062

А. М. СИРОТЕНКО, начальник, д-р військових наук
ORCID 0000-0002-0266-5706

Б. Й. СЕМОН, голов. наук. співроб., д-р техн. наук, проф., заслужений діяч науки і техніки України
ORCID ID 0000-0002-7449-8214

О. М. НЕДІЛЬКО, пров. наук. співроб., канд. техн. наук, доцент
ORCID ID 0000-0001-8080-0486
E-mail: Nedilko1962@gmail.com

Національний університет оборони України імені Івана Черняхівського
Повітрофлотський проспект 28, Київ, Україна, 03049

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФЮЗЕЛЯЖНИХ КОЛИВАНЬ НА ТРАНСЗВУКОВИХ ШВИДКОСТЯХ ПОЛЬОТУ

Забезпечення безпеки польотів надзвукових літаків та аерокосмічних систем у трансзвуковому діапазоні чисел M польоту досі залишається актуальною науковою і прикладною проблемою. Це зумовлено особливостями обтікання аеродинамічних поверхонь неоднорідним (трансзвуковим) потоком повітря і пов'язано з виникненням на цих режимах польоту різноманітних явищ аеропружності та відсутністю на теперішній час загально визнаної моделі виникнення трансзвукового флатера навіть для аеродинамічних поверхонь керування.

На основі спільного аналізу умов формування стрибків тиску на поверхні аеродинамічного профілю, зміни параметрів надзвукового потоку у течії Прандтля — Майера та гіпотези «динамічного скривлення аеродинамічного профілю» отримано наближені закономірності взаємодії пружних згинальних коливань фюзеляжу з коливаннями стрибків тиску. Отримані закономірності використані для обґрунтування математичної моделі оцінки збуджених згинальних моментів фюзеляжу. Аналіз отриманої математичної моделі підтверджує теоретичну можливість виникнення фюзеляжних форм трансзвукового флатера надзвукових літаків, яке спостерігалось у льотному експерименті і яке зумовлене особливостями взаємодії стрибків тиску з кутовою швидкістю пружних згинальних коливань фюзеляжу.

При прийнятих у статті вхідних геометричних даних профілю аеродинамічних поверхонь фюзеляжу за допомогою розробленої математичної моделі отримано максимально можливі величини збуджених згинальних моментів фюзеляжу.

Отримана математична модель може бути використана для попередньої наближеної оцінки характеристик фюзеляжних форм трансзвукового флатера надзвукових літаків та аерокосмічних систем.

Ключові слова: математична модель, трансзвуковий флатер, аеродинамічний профіль, аеродинамічна поверхня фюзеляжу, стрибки тиску, трансзвуковий потік, число M польоту, тиск місцевого надзвукового потоку, збуджений згинальний момент, надзвукові літаки.

Цитування: Сафронов О. В., Сиротенко А. М., Семон Б. Й., Неділько О. М. Математична модель фюзеляжних коливань на трансзвукових швидкостях польоту. *Космічна наука і технологія*. 2021. 27, № 2 (129). С. 28—37. <https://doi.org/10.15407/knit2021.02.028>

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Забезпечення безпеки польотів надзвукових літаків та аерокосмічних систем у трансзвуковому діапазоні чисел M польоту досі залишається актуальною науковою і прикладною проблемою. Це зумовлено особливостями обтікання аеродинамічних поверхонь неоднорідним (трансзвуковим) потоком повітря і пов'язано з виникненням на цих режимах польоту різноманітних явищ аеропружності. До таких явищ належать:

- збільшення згинальних моментів несучих аеродинамічних поверхонь;
- збільшення статичних шарнірних моментів аеродинамічних поверхонь керування;
- виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь керування (виникнення трансзвукового флатера).

Трансзвуковий флатер літаків виникає, як правило, на аеродинамічних поверхнях керування [5, 6]. Особливості цього типу такі [10–14]:

- трансзвуковий флатер виникає на аеродинамічних поверхнях, коливання яких можливо зобразити коливаннями пружних систем з одним ступенем свободи;
- явище спостерігається у дуже вузькому діапазоні чисел M польоту, коли стрибки тиску виникають поблизу задньої кромки профілю аеродинамічних поверхонь;
- коливання за формою близькі до гармонійних коливань, частоти яких відповідають власним частотам пружних коливань аеродинамічних поверхонь і не змінюються при зміні висоти польоту або швидкісного напору повітря;
- коливання мають нелінійний характер, амплітуда яких збільшується зі збільшенням швидкісного напору потоку повітря або зі зменшенням висоти польоту.

Але необхідно зауважити, що у льотних випробуваннях літаків, фюзеляжі яких мають великі несучі аеродинамічні поверхні, на трансзвукових числах M польоту неодноразово виникали інтенсивні коливання фюзеляжу у вертикальній площині. У деяких випадках рівень цих коливань, за заявою пілотів, значно ускладнює керування літаком. При цьому швидкість літака, незважаючи на збільшення тяги двигунів, не збільшувалась.

Необхідно також зауважити, що інтенсивні коливання фюзеляжу виникали на тих зразках літаків, на яких при модернізації з поверхні фюзеляжу були усунуті елементи конструкції для забору повітря. Тобто, за допомогою цих доробок планувалося збільшити швидкість і дальність польоту літака, але фактично після цього максимальна швидкість ставала дозвуковою.

АНАЛІЗ ОСНОВНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

У роботі [5], яка присвячена дослідженням коливань аеродинамічних поверхонь керування літаків на трансзвукових швидкостях польоту, розглянуто три типи коливань:

- тип «А» — коливання аеродинамічних поверхонь керування, зумовлені відривом прикордонного шару за стрибками ущільнення і які спостерігаються в експериментальних дослідженнях на великих кутах атаки і при відсутності стрибків ущільнення на поверхні аеродинамічного профілю;
- тип «В» — коливання аеродинамічних поверхонь керування, зумовлені особливостями їхньої взаємодії зі стрибками ущільнення і спостерігаються в експериментальних дослідженнях на тонких симетричних аеродинамічних профілях, розташованих у трансзвуковому потоці повітря під нульовим кутом атаки;
- тип «С» — коливання аеродинамічних поверхонь керування при невеликих надзвукових швидкостях польоту.

Зауважимо, що до найбільш небезпечних явищ аеропружності належать коливання аеродинамічних поверхонь керування типу «В», виникнення яких неодноразово закінчувалося руйнацією елементів конструкції літаків, і у першу чергу елементів конструкції аеродинамічних поверхонь керування.

У деяких працях [13] цей тип коливань аеродинамічних поверхонь керування має назву «трансзвуковий» (одноступеневий) флатер, оскільки виникнення цього типу коливань можливе при наявності лише одного ступеня свободи, наприклад при наявності лише крутильних коливань аеродинамічної поверхні керування.

Теоретичним та експериментальним дослідженням цього явища присвячено багато публі-

кацій, в яких запропоновані різноманітні підходи для обґрунтування причин виникнення інтенсивних коливань аеродинамічних поверхонь керування сучасних надзвукових літаків, умови їхнього виникнення, вплив різноманітних факторів на рівень коливань [5, 7, 8, 10–14].

За результатами льотних та лабораторних досліджень відомо:

- виникнення трансзвукового флатера спостерігається у вузькому діапазоні чисел M польоту;
- частоти коливань дорівнюють частотам власних пружних коливань аеродинамічних поверхонь керування у наземних умовах;
- рівень коливань збільшується зі збільшенням швидкісного напору або зі зменшенням висоти польоту.

Відмічено, що рівень цих коливань залежить від великої кількості параметрів, до основних з яких віднесені [5, 14]:

- число M потоку повітря;
- геометричні характеристики аеродинамічних поверхонь;
- частота власних пружних коливань аеродинамічних поверхонь керування;
- масово-інерційні характеристики аеродинамічних поверхонь керування.

У деяких працях відмічено вплив стрибків ущільнення на виникнення коливань аеродинамічних поверхонь у трансзвуковому потоці повітря.

Так, у роботі [8] відмічено: «Стрибок ущільнення є основною причиною різкого зниження межі флатера на режимі трансзвукових швидкостей», але теоретичного обґрунтування цього припущення у роботі не наведено. У роботі [7] вказано, що «ударні хвилі не виникають в якійсь визначеній точці профілю, вони коливаються з великою частотою між двома можливими положеннями рівноваги».

Що стосується виникнення фізеляжних форм трансзвукового флатера, то теоретичних робіт, присвячених цій проблемі, немає.

Труднощі вирішення проблеми запобігання зазначених коливань фізеляжу зумовлені відсутністю на теперішній час загально визнаної моделі виникнення трансзвукового флатера навіть для аеродинамічних поверхонь керування.

Одну з можливих моделей виникнення трансзвукового флатера аеродинамічних поверхонь керування, в основу якої покладено аналіз взаємодії коливань аеродинамічних поверхонь керування з коливаннями стрибків тиску (ущільнення), було запропоновано у роботах [11–13].

Метою даної статті є теоретичне обґрунтування можливості виникнення фізеляжних форм трансзвукового флатера літаків на цих режимах польоту.

ВИКЛАД ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

Для теоретичного обґрунтування можливості виникнення цього явища скористаємося підходом, використаним у роботах [2, 11].

Згинальні коливання фізеляжу у вертикальній площині можна описати за допомогою диференційного рівняння у частинних похідних 4-го порядку [2]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 Y(x; t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 Y(x; t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де $EI(x)$ — зміна жорсткості на згин по довжині фізеляжу, $Y(x; t)$ — згинальні пружні коливання фізеляжу, $m(x)$ — зміна розподіленої маси фізеляжу по довжині.

Розв'язок рівняння (1) можна подати у вигляді [2]

$$Y(x; t) = Y(x)\phi(t) = Y(x)\phi_0 \sin \omega t, \quad (2)$$

де $Y(x)$ — функція форми пружних згинальних коливань (характер зміни амплітуди коливань по довжині фізеляжу), $\phi(t)$ — характер змін згинальних пружних коливань фізеляжу з часом, ϕ_0 — амплітуда кутових згинальних пружних коливань фізеляжу, ω — кругова частота власних згинальних пружних коливань фізеляжу.

Тобто, коли стрибки тиску будуть розташовані на поверхні фізеляжу на відстані $x = x_C$ від осі жорсткості фізеляжу, то пружні коливання у цьому перерізі можна подати залежністю, аналогічною залежності (2):

$$Y(x_C; t) = Y(x_C)\phi_0 \sin \omega t, \quad (3)$$

де $Y(x_C)$ — амплітуда згинальних коливань у перерізі фізеляжу $x = x_C$.

З метою спрощення аналізу взаємодії згинальних пружних коливань фізеляжу з коливання-

ми стрибків тиску розглянемо лише взаємодію першого тону згинальних пружних коливань фюзеляжу у вертикальній площині з коливаннями стрибків тиску. Першу форму згинальних коливань фюзеляжу представимо параболою, тобто зміна кутів згинальної пружної деформації фюзеляжу по довжині при виникненні трансзвукового флатера запишеться у вигляді

$$\frac{\partial Y_1(x; t)}{\partial x} = Y_1'(x; t) = \frac{x}{b} \phi_0 \sin \omega_1 t, \quad (4)$$

де $Y_1'(x; t)$ — характер зміни кутів згинальної пружної деформації фюзеляжу, b — відстань перерізу пучності пружної лінії коливань фюзеляжу (осі жорсткості фюзеляжу) до його задньої кромки, ω_1 — кругова частота першого тону власних згинальних пружних коливань фюзеляжу.

Для досягнення поставленої мети нагадаємо також, що у роботі [11] було запропоновано наближену умову переходу надзвукового потоку у дозвуковий, тобто, умову формування стрибків тиску на профілі аеродинамічної поверхні:

$$M_1 - 1 = 2(M_\infty - M_{кр}), \quad (5)$$

де M_1 — максимальне місцеве число M надзвукового потоку перед стрибками тиску, M_∞ — число M незбудженого дозвукового потоку повітря, $M_{кр}$ — критичне число M аеродинамічного профілю.

Враховуючи, що на трансзвукових режимах польоту літаків місцева швидкість потоку повітря до перерізу фюзеляжу $x = x_c$ є надзвуковою, обтікання цієї поверхні можна розглядати як течію Прандтля — Майєра навколо опуклого кута. При цьому місцева швидкість потоку зростає зі збільшенням кута нахилу дотичної до поверхні фюзеляжу [1]. Як доведено у роботі [11], максимальне місцеве число M надзвукового потоку перед стрибками тиску у залежності (5) можна отримати з наближеної залежності

$$M_1 \approx \sqrt[3]{1 + 11.5\psi(x)}, \quad (6)$$

де $\psi(x)$ — кут відхилення надзвукового потоку на поверхні профілю.

Відносна похибка визначення числа M місцевого надзвукового потоку на поверхні аеродинамічного профілю за допомогою залежності (6) при $\psi(x) \leq 15^\circ$ не перевищує $\varepsilon = 1\%$. Така

похибка значно менша від похибок обробки експериментальних даних, $\varepsilon \geq 5\%$ [10].

Також з метою спрощення аналізу взаємодії пружних згинальних коливань фюзеляжу з коливаннями стрибків тиску профіль дифузорної частини аеродинамічної поверхні фюзеляжу приймаємо симетричним, а зміну кутів профілю за довжиною фюзеляжу представимо у вигляді

$$\psi(x) \approx \psi_0 \frac{x_c}{b_1}, \quad (7)$$

де ψ_0 — максимальний кут нахилу дотичної до профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу або максимальний кут відхилення місцевого надзвукового потоку на поверхні фюзеляжу при відсутності коливань, x_c — відстань перерізу розташування стрибків тиску від перерізу максимальної товщини профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу, b_1 — відстань перерізу максимальної товщини профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу до його задньої кромки.

При виникненні згинальних пружних коливань фюзеляжу місцевий кут обтікання аеродинамічної поверхні фюзеляжу надзвуковим потоком повітря змінюється на величину

$$\Delta\psi_1(x_c; Y_1') = \frac{x_c}{b} \phi_0, \quad (8)$$

де $\Delta\psi_1(x_c; Y_1')$ — максимальна величина відхилення місцевого надзвукового потоку у перерізі розташування стрибків тиску, зумовлена кутами пружними згинальними коливаннями фюзеляжу у вертикальній площині.

Оскільки при коливаннях фюзеляжу усі числа M у залежності (5) залишаються незмінними, то згідно з рівнянням (6) стрибки тиску переміщуються у ті перерізи фюзеляжу, в яких місцевий кут обтікання поверхні фюзеляжу надзвуковим потоком повітря дорівнює куту відхилення надзвукового потоку у перерізі початкового розташування стрибків тиску.

З урахуванням цих зауважень та залежностей (5)—(8), характер взаємодії кутових пружних згинальних коливань фюзеляжу з коливаннями стрибків тиску можна визначити з рівняння

$$\begin{aligned} \psi(x) &\approx \psi_0 \frac{x_c}{b_1} = \\ &= \psi_0 \frac{x_c + \Delta x_n(x_c; Y_1')}{b_1} - \frac{x_c + \Delta x_n(x_c; Y_1')}{b} \phi_0, \quad (9) \end{aligned}$$

де $\Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1')$ — максимальна величина переміщення стрибків тиску назад від початкового розташування, зумовлене кутовим відхиленням профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу при пружних згинальних коливаннях.

Прийнявши у рівнянні (9) $b = b_1$ після перетворення отримаємо максимальну величину переміщення стрибків тиску назад від початкового розташування

$$\Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1') = \frac{x_c \phi_0}{\psi_0 - \phi_0}. \quad (10)$$

Аналогічно можна отримати і максимальну величину переміщення стрибків тиску вперед від початкового розташування

$$\Delta x_b(x_c; \dot{Y}_1') = \frac{x_c \phi_0}{\psi_0 + \phi_0}, \quad (11)$$

де $\Delta x_b(x_c; \dot{Y}_1')$ — максимальна величина переміщення стрибків тиску вперед від початкового розташування, зумовлене кутовим відхиленням профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу при пружних згинальних коливаннях.

У загальному випадку характер взаємодії згинальних коливань фюзеляжу з коливаннями стрибків тиску можна подати залежністю

$$\Delta x(x_c; \dot{Y}_1'; t) = \frac{x_c \phi(t)}{\psi_0 + \phi(t)}. \quad (12)$$

Зауважимо, що переміщення стрибків тиску, визначені залежностями (10) — (12), викликають виникнення дестабілізаційних сил і моментів, тобто сил і моментів, які діють у бік відхилення пружних деформацій фюзеляжу. Але робота цих сил і моментів за один період пружних згинальних коливань фюзеляжу дорівнює нулеві, тому їхнє виникнення не викликає збільшення пружних згинальних коливань фюзеляжу, тобто не викликає трансзвукового флатера.

Для визначення причин виникнення трансзвукового флатера розглянемо вплив швидкості кутового відхилення фюзеляжу при пружних згинальних коливаннях на характер обтікання профілю його поверхні трансзвуковим потоком повітря.

З цією метою скористаємося гіпотезою «динамічного скривлення» аеродинамічного профілю, згідно з якою аеродинамічні характеристики профілю, який коливається, не відрізняються

від характеристик сталого профілю, скривленого таким чином, що зміна місцевих кутів його обтікання відповідає умові [9]:

$$\begin{aligned} \Delta \psi_2(x_c; \dot{Y}_1'; t) &= \frac{\dot{Y}_1'(x; t)}{V} = \\ &= \frac{x}{V} \dot{\phi}(t) = \frac{x}{V} \omega_1 \phi_0 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (13)$$

де $\Delta \psi_2(x_c; \dot{Y}_1'; t)$ — максимальна величина відхилення місцевого надзвукового потоку, зумовлена швидкістю кутових пружних згинальних коливань фюзеляжу у вертикальній площині.

У цьому випадку характер взаємодії пружних згинальних коливань фюзеляжу з коливаннями стрибків тиску можна, по аналогії з рівнянням (8), визначити рівнянням

$$\begin{aligned} \psi(x) &\approx \psi_0 \frac{x_c}{b_1} = \\ &= \psi_0 \frac{x_c + \Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1')}{b_1} - \frac{x + \Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1')}{V} \omega_1 \phi_0, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1')$ — максимальна величина переміщення стрибків тиску назад від початкового розташування, зумовлене кутовою швидкістю згинальних коливань фюзеляжу.

Після перетворення рівняння (14) отримаємо

$$\Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1') = \frac{x_c b_1 \omega_1 \phi_0}{\psi_0 V - b_1 \omega_1 \phi_0}. \quad (15)$$

Аналогічно можна визначити і максимальну величину переміщення стрибків тиску вперед від початкового розташування:

$$\Delta x_b(x_c; \dot{Y}_1') = \frac{x_c b_1 \omega_1 \phi_0}{\psi_0 V + b_1 \omega_1 \phi_0}. \quad (16)$$

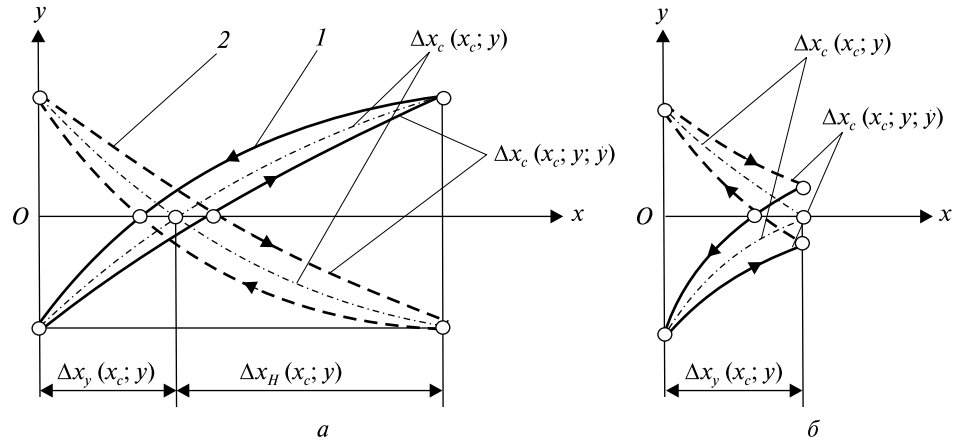
Як і вище, у загальному випадку характер взаємодії коливань стрибків тиску з кутовою швидкістю згинальних пружних коливань фюзеляжу можна подати залежністю

$$\Delta x_c(x_c; \dot{Y}_1'; t) = \frac{x_c b_1 \dot{\phi}(t)}{\psi_0 V + b_1 \dot{\phi}(t)}. \quad (17)$$

Сумарне переміщення стрибків тиску по довжині аеродинамічної поверхні фюзеляжу дорівнює алгебраїчній сумі залежностей (12) та (17):

$$\Delta x_c(x_c; \dot{Y}_1'; \dot{Y}_1'; t) = \frac{x_c \phi(t)}{\psi_0 + \phi(t)} + \frac{x_c b_1 \dot{\phi}(t)}{\psi_0 V + b_1 \dot{\phi}(t)}. \quad (18)$$

Закономірності взаємодії верхнього (1) і нижнього (2) стрибків тиску з пружними згинальними коливаннями фюзеляжу: *a* — без обмеження руху стрибків тиску, *б* — з обмеженням руху стрибків тиску



Характер взаємодії коливань пружних згинальних коливань фюзеляжу з коливаннями стрибків тиску подано на рисунку.

При малих амплітудах коливань, враховуючи, що коливання носять гармонічний характер, рівняння (18) можна подати у вигляді

$$\Delta x_c(x_c; Y_1; \dot{Y}_1; t) = \frac{x_c}{\psi_0} \phi_0 \sin \omega_1 t + \frac{x_c b_1 \omega_1}{\psi_0 V} \phi_0 \cos \omega_1 t. \quad (19)$$

Перетворимо рівняння (19) до виду [15]

$$\Delta x_c(x_c; Y_1; \dot{Y}_1; t) = \frac{x_c}{\psi_0} \phi_0 \sqrt{1 + \frac{b_1^2 \omega_1^2}{V^2}} \sin(\omega_1 t + \alpha), \quad (20)$$

де α — кут випередження, зумовлений кутовою швидкістю згинальних пружних коливань фюзеляжу і визначається залежністю

$$\alpha = \arctg \frac{b_1 \omega_1}{V}. \quad (21)$$

З аналізу рівнянь (19)–(21) випливає, що складова коливань стрибків тиску, зумовлена кутовою швидкістю пружних згинальних коливань фюзеляжу, випереджає кут його відхилення. Саме ця складова викликає такий розподіл тиску надзвукового потоку по довжині фюзеляжу, внаслідок якого виникають збуджені сили і моменти. Тобто, можливе виникнення трансзвукового флатера.

Оцінимо величини цих сил і моментів.

При малих амплітудах коливань, враховуючи, що зміна тиску місцевого надзвукового потоку після стрибків ущільнення до тиску незбудженого потоку повітря здійснюється за законом, близьким до лінійного [3, 4], характер зміни роз-

поділеної величини збудженої сили по довжині аеродинамічної поверхні фюзеляжу можна подати у вигляді, запропонованому у роботі [11]:

$$\bar{F}_1(x_c; \dot{Y}_1) \approx \frac{1}{2} \Delta P(x) \Delta L_1(x_c; \dot{Y}_1), \quad (22)$$

де $\Delta P(x)$ — розподіл зміни тиску місцевого надзвукового потоку по довжині фюзеляжу, $\Delta L_1(x_c; \dot{Y}_1)$ — сумарне переміщення стрибків ущільнення вперед і назад від початкового розташування, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю пружних згинальних коливань фюзеляжу.

З рівнянь (15) і (16) отримаємо сумарне переміщення стрибків ущільнення вперед і назад від початкового розташування, зумовлене їхньою взаємодією з кутовою швидкістю пружних згинальних коливань фюзеляжу:

$$\Delta L_1(x_c; \dot{Y}_1) \approx 2 \frac{x_{ck} b_1 \psi_0 V \omega_1 \phi_0}{\psi_0^2 V^2 - b_1^2 \omega_1^2 \phi_0^2}. \quad (23)$$

На основі результатів [3, 4], розподіл зміни тиску місцевого надзвукового потоку по хорді аеродинамічного профілю від $x_c = 0$ до перерізу розташування стрибків ущільнення можна подати у вигляді, запропонованому у роботі [11]

$$\Delta P(x) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right), \quad (24)$$

де ΔP_0 — максимальна величина зміни тиску місцевого надзвукового потоку на профілі аеродинамічної поверхні фюзеляжу при таких числах M дозвукового потоку, коли стрибки ущільнення досягають його задньої кромки.

Підставляючи залежності (23) і (24) у рівняння (22), отримуємо характер зміни розподіленої величини збудженої сили по хорді профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу

$$\bar{F}_1(x_c; \dot{Y}_1) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \frac{x_c b_1 \psi_0 V \omega_1 \phi_0}{\psi_0^2 V^2 - b_1^2 \omega_1^2 \phi_0^2}. \quad (25)$$

Наближену залежність розподіленої величини збудженого згинального моменту фюзеляжу від розташування стрибків тиску оцінимо шляхом множення розподіленої збудженої сили на координату її прикладення:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1(x_c; \dot{Y}_1) &\approx \\ &\approx \bar{F}_1(x_c; \dot{Y}_1) \left[x_c + \frac{\Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1) - \Delta x_b(x_c; \dot{Y}_1)}{2} \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

Підставляючи залежності (15), (16) і (25) у рівняння (26), отримуємо

$$\bar{M}_1(x_c; \dot{Y}_1) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \frac{x_c^2 b_1 \omega_1 \phi_0 \psi_0^3 V^3}{(\psi_0^2 V^2 - b_1^2 \omega_1^2 \phi_0^2)^2}. \quad (27)$$

З метою спрощення аналізу рівняння (27) введемо груповий безрозмірний параметр

$$Z = \frac{b_1 \omega_1 \phi_0}{\psi_0 V}. \quad (28)$$

З урахуванням залежності (28) розподілену величину збудженої сили у рівнянні (25) можна подати у вигляді

$$\bar{F}_1(x_c; Z; \dot{Y}_1) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \frac{x_c^2 Z}{1 - Z^2}. \quad (29)$$

Розподілену величину збудженого згинального моменту фюзеляжу у рівнянні (27), з урахуванням залежності (28), також можна подати у спрощеному вигляді

$$\bar{M}_1(x_c; Z; \dot{Y}_1) \approx \frac{1}{2} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \frac{x_c^2 Z}{(1 - Z^2)^2}. \quad (30)$$

З аналізу рівняння (30) випливає, що збуджений згинальний момент фюзеляжу збільшується з переміщенням стрибків тиску до задньої кромки профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу. Але при збільшенні числа M польоту або при збільшенні амплітуди згинальних пружних коливань фюзеляжу переміщення стрибків тиску назад від початкового розташування обмежуються задньою кромкою аеродинамічної по-

верхні фюзеляжу, тому їхнє сумарне переміщення починає зменшуватися за законом

$$\Delta l_2(x_c; \dot{Y}_1) = b_1 - x_c + \Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1). \quad (31)$$

Підставляючи залежність (16) у рівняння (31) та враховуючи позначення (28), отримуємо

$$\Delta l_2(x_c; Z; \dot{Y}_1) = b_1 - \frac{x_c}{1 + Z}. \quad (32)$$

На цій ділянці аеродинамічної поверхні фюзеляжу починає зменшуватися як величина збудженої сили, так і величина збудженого згинального моменту фюзеляжу.

Характер зменшення розподіленої збудженої сили на цій ділянці аеродинамічної поверхні фюзеляжу отримуємо з рівняння, яке аналогічне рівнянню (22) і яке, з урахуванням залежностей (24), (28) і (32), можна подати у вигляді

$$\bar{F}_2(x_c; Z; \dot{Y}_1) \approx \frac{1}{4} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \left(b_1 - \frac{x_c}{1 + Z} \right). \quad (33)$$

Наближену залежність збудженого згинального моменту фюзеляжу на цій ділянці профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу також можна отримати з рівняння, яке аналогічне рівнянню (26):

$$\bar{M}_2(x_c; Z; \dot{Y}_1) \approx \bar{F}_2(x_c; Z; \dot{Y}_1) \left[b_1 - \frac{1}{2} \Delta l_2(x_c; \dot{Y}_1) \right]. \quad (34)$$

Підставляючи залежності (32) та (33) у рівняння (34), отримуємо розподілену величину збудженого згинального моменту фюзеляжу на цій ділянці профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу

$$\bar{M}_2(x_c; Z; \dot{Y}_1) \approx \frac{1}{8} \Delta P_0 \left(1 + \frac{x_c}{b_1} \right) \left[b_1^2 - \frac{x_c^2}{(1 + Z)^2} \right]. \quad (35)$$

Рівняння (30) і (35) дозволяють оцінити характер зміни розподіленого збудженого згинального моменту фюзеляжу на розглянутих ділянках профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу.

Величина розподіленого збудженого згинального моменту фюзеляжу буде максимальною при умові

$$x_c = b_1 - \Delta x_n(x_c; \dot{Y}_1). \quad (36)$$

Тобто, при умові, коли переміщення стрибків тиску назад від початкового розташування починають обмежуватися задньою кромкою аеродинамічної поверхні фюзеляжу.

З урахуванням позначення (28), умова (36) набуває вигляду

$$x_c = b_1(1 - Z). \quad (37)$$

Підставляючи умову (37) у рівняння (30) або у рівняння (35), отримуємо максимальну розподілену величину збудженого згинального моменту фюзеляжу, зумовленого особливостями взаємодії стрибків тиску зі швидкістю пружних кутових коливань фюзеляжу

$$\bar{M}_1(Z; \dot{Y}_1) = \bar{M}_2(Z; \dot{Y}_1) \approx \Delta P_0 b_1^2 \left(1 - \frac{Z}{2}\right) \frac{Z}{(1+Z)^2}. \quad (38)$$

З аналізу рівняння (38) випливає, що залежність збудженого згинального моменту фюзеляжу нелінійна: зі збільшенням групового безрозмірного параметра він спочатку збільшується, а потім зменшується.

З метою визначення максимально можливої величини розподіленого збудженого згинального моменту фюзеляжу введемо безрозмірну величину — коефіцієнт збудженого згинального моменту фюзеляжу

$$m(Z; \dot{Y}_1) = \frac{\bar{M}_1(Z; \dot{Y}_1)}{\Delta P_0 b_1^2} \approx \left(1 - \frac{Z}{2}\right) \frac{Z}{(1+Z)^2}. \quad (39)$$

Максимальна величина коефіцієнта збудженого згинального моменту фюзеляжу спостерігається при умові

$$\frac{dm(Z; \dot{Y}_1)}{dZ} = 0. \quad (40)$$

Після диференціювання залежності (39) з урахуванням умови (40) отримуємо рівняння

$$2Z^2 + Z - 1 = 0. \quad (41)$$

З роз'язку рівняння (41) випливає, що максимальна величина коефіцієнта збудженого згинального моменту фюзеляжу, а тому і максимально можлива величина збудженого згинального моменту фюзеляжу спостерігається при

$$Z = 0.5.$$

Підставляючи це значення безрозмірного групового параметра у рівняння (38), отримуємо максимально можливу величину розподіленої величини збудженого згинального моменту фюзеляжу, зумовлений впливом швидкості кутових пружних згинальних коливань фюзеляжу на ха-

рактир їхньої взаємодії з коливаннями стрибків тиску

$$\bar{M}_0(\dot{Y}_1) \approx \frac{1}{6} \Delta P_0 b_1^2. \quad (42)$$

Величину ΔP_0 у рівнянні (42) можна подати відомою наближеною залежністю [11]

$$\Delta P_0 \approx P_\infty (M_{10} - M_\infty), \quad (43)$$

де M_{10} — число M місцевого надзвукового потоку на аеродинамічній поверхні фюзеляжу, при якому стрибки ущільнення досягають його задньої кромки, M_∞ — число M незбудженого дозвукового потоку, при якому стрибки ущільнення досягають задньої кромки аеродинамічної поверхні фюзеляжу.

Число M_{10} місцевого надзвукового потоку на профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу в рівнянні (43) можна визначити з рівняння, аналогічного рівнянню (6), тобто

$$M_{10} \approx \sqrt[3]{1 + 11.5\phi_0}. \quad (44)$$

А число M_∞ незбудженого дозвукового потоку повітря у рівнянні (43) можна визначити з рівняння (5), яке у даному випадку має вигляд

$$M_{10} - 1 \approx 2(M_\infty - M_{кр}), \quad (45)$$

де $M_{кр}$ — критичне число M профілю аеродинамічної поверхні фюзеляжу.

ВИСНОВКИ

Отримано математичну модель оцінки розподілених збуджених сил та розподілених збуджених згинальних моментів фюзеляжу при виникненні фюзеляжних форм трансзвукового флатера, зумовлені особливостями взаємодії пружних згинальних коливань фюзеляжу з коливаннями стрибків тиску. Дана модель дозволяє обґрунтувати теоретичну можливість виникнення фюзеляжних форм трансзвукового флатера і, при відомих величинах згинальних моментів, зумовлених силами аеродинамічного та конструкційного демпфування, дозволяють обґрунтувати умови, при яких можливе виникнення фюзеляжних форм трансзвукового флатера.

Отримана математична модель може бути використана для попередньої наближеної оцінки характеристик фюзеляжних форм трансзвукового флатера надзвукових літаків та аерокосмічних систем.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. *Прикладная газовая динамика*. М.: Наука, 1976. 888 с.
2. Ананьев И. В., Тимофеев П. Г. *Колебания упругих систем в авиационных конструкциях и их демпфирование*. М.: Машиностроение, 1965. 526.
3. *Аэродинамика летательных аппаратов при трансзвуковых скоростях. Часть I. Обзоры. Переводы. Рефераты. Центр аэро-гидродинам. ин-та*. 1974. № 441. 140 с.
4. *Аэродинамика летательных аппаратов при трансзвуковых скоростях. Часть II. Обзоры. Переводы. Рефераты. Центр аэро-гидродинам. ин-та*. 1974. № 442. 161 с.
5. *Аэродинамическое исследование колеблющейся поверхности управления при трансзвуковых скоростях (по материалам иностранной печати). Обзор*. 1975. № 456. 105 с.
6. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. *Аэроупругость*. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 800 с.
7. Гошек И. *Аэродинамика больших скоростей*. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 547 с.
8. Исогаи К. О механизме резкого снижения границы флаттера крыла прямой стреловидности на режиме трансзвукового полета. Ч. II. *Ракетная техника и космонавтика*. 1981. **19**, № 10. С. 169—171.
9. Келдыш М. В. *Избранные труды. Механика*. М.: Наука, 1985. 567 с.
10. Левкин В. Ф. Экспериментальные исследования нестационарных аэродинамических характеристик поверхностей управления при трансзвуковых скоростях. *Тр. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1982. Вып. 2132. 16 с.
11. Сафронов А. В. Аэродинамическое воздействие скачков уплотнения на колеблющийся в околосзвуковом потоке элерон. *Уч. зап. Центр. аэро-гидродинам. ин-та*. 1991. **22**, № 3. С. 110—117.
12. Сафронов А. В. Модель возникновения автоколебаний аэродинамических поверхностей управления на околосзвуковых скоростях. *Пробл. прочности*. 1989. № 1. С. 111—112.
13. Сафронов О. В., Семон Б. Й., Неділько О. М. Математична модель оцінки впливу аеродинамічної компенсації поверхонь керування на рівень їх коливань при виникненні трансзвукового флаттера. *Космічна наука і технологія*. 2018. **24**, № 4. С. 14—23.
14. Сафронов О. В., Семон Б. Й., Неділько О. М. Трансзвуковий флаттер від МіГ-25 до SpaceShip Two. *Наука і оборона*. 2016. № 3. С. 32—35.
15. Тимошенко С. П. *Колебания в инженерном деле*. М.: Физматгиз, 1959. 439 с.

Стаття надійшла до редакції 20.05.2020

REFERENCES

1. Abramovich G. N. (1976). *Applied gas dynamics*. M.: Nauka.
2. Ananiev Y. V., Tymofeev P. G. (1965). *Oscillations of elastic systems in aircraft structures and their damping*. M.: Mashynostroenye.
3. Aerodynamics of aircraft at transonic speeds. Part I. (1974). *Obzory. Perevody. Referaty. CAGI*, № 441.
4. Aerodynamics of aircraft at transonic speeds. Part II. (1974). *Obzory. Perevody. Referaty. CAGI*, № 442.
5. Aerodynamic study of the oscillating control surface at transonic speeds (according to materials of foreign press). (1975). *Obzor*, № 456, 105 p.
6. Bisplinghoff R. L., Ashley X., Halfman R. L. (1958). *Aeroelasticity*. M.: Izd-vo inostr. lit.
7. Goshek I. (1954). *High speed aerodynamics*. M.:Izd-vo inostr. lit.
8. Ysogai K. (1981). On the mechanism of a sharp decrease in the flutter boundary of a straight sweep wing in the transonic flight mode. Part II. *Raketnaya texnyka i kosmonavtyka*, **19**, № 10, 169—171.
9. Keldish M. V.(1985). *Selected works. Mechanics*. M.: Nauka.
10. Levkyn V. F. (1982). Experimental studies of nonstationary aerodynamic characteristics of control surfaces at transonic speeds. *Tr. CAGI*, випуск 2132, 16 p.
11. Safronov A. V. (1991). Aerodynamic effect of compaction jumps on the aileron oscillating in the near-sonic eleron flow. *Uchenie zapysky CAGI*, **22**(3), 110—117.
12. Safronov A. V. (1989). Model of self-oscillations of aerodynamic control surfaces at near-sonic speeds. *Problemi prochnosti*, № 1, 111—112.
13. Safronov O. V., Semon B. J., Nedilko O. M. (2018). Mathematical model for estimating the influence of control surfaces aerodynamic compensation on the level of their oscillations in the event of a transonic flutter. *Kosmichna nauka i tehnologiya*, **24** (4), 14—23.
14. Safronov O. V., Semon B. J., Nedilko O. M. (2016). Transonic flutter from MiG-25 to SpaceShip Two. *Science and defence*, № 3, 32—35.
15. Tymoshenko S. P. (1959). *Fluctuations in engineering*. M.: Fyzmatgiz, 439 p.

Received 20.05.2020

O. V. Safronov, Full Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,
Leading Researcher, Dr. Sci. in Tech.

ORCID ID 0000-0001-7420-0062

A. M. Syrotenko, Chief, Dr. Sci. in Military Sciences

ORCID 0000-0002-0266-5706

B. Y. Semon, Full Professor, Honored Worker of Science and Technology of Ukraine,
Chief Researcher, Dr. Sci. in Tech.

ORCID ID 0000-0002-7449-8214

O. M. Nedilko, Associated Professor, Leading Researcher, Ph.D. in Tech.

ORCID ID 0000-0001-8080-0486

E-mail: Nedilko1962@gmail.com

The National Defence University of Ukraine named after Ivan Cherniakhovskyi

28 Povitroflotskyi Ave., Kyiv-049, 03049 Ukraine

MATHEMATICAL MODEL OF FUSELAGE OSCILLATIONS AT TRANSONIC FLIGHT SPEEDS

Ensuring the safety of supersonic aircraft flights and aerospace systems in the transonic range of M flight numbers still remains an urgent scientific and applied problem. This is caused by the peculiarities of the aerodynamic surfaces flow by inhomogeneous (transonic) air and is due to the emergence of various aeroelastic phenomena in these flight modes and the current lack of a generally accepted model of transonic flutter, even for aerodynamic control surfaces.

Based on a joint analysis of the conditions for the formation of shock waves on the surface of the aerodynamic profile, changes in the parameters of supersonic flow across the Prandtl-Meyer expansion fan, and the hypothesis of “dynamic curvature of the aerodynamic profile”, the approximate laws of interaction of elastic bending vibrations of the fuselage with fluctuations in shock waves were obtained.

The obtained regularities are used to substantiate a mathematical model for estimating excited forces and excited bending moments of the fuselage. The analysis of the obtained mathematical model confirms the theoretical possibility of the appearance of fuselage forms of transonic flutter in supersonic aircraft, which was observed in the flight experiment and which is due to the interaction of shock waves with the angular velocity of the fuselage elastic bending vibrations.

With the accepted in the article input geometrical data of a fuselage aerodynamic surfaces' profile, the maximum possible values of fuselage bending moments are obtained using the developed mathematical model.

The obtained mathematical model can be used for a preliminary approximate assessment of the transonic flutter fuselage forms characteristics in supersonic aircraft and aerospace systems.

Keywords: mathematical model, transonic flutter, aerodynamic profile, aerodynamic fuselage surfaces, shock waves, transonic flow, number M of flight, local supersonic flow pressure, excited bending moment, supersonic planes.