

doi: <https://doi.org/10.15407/kfnt2024.05.073>

УДК 551.51; 551.511.31; 551.510.413.5

**О. К. Черемних¹, С. О. Черемних¹,
В. М. Лашкін^{2,1}, А. К. Федоренко¹**

¹Інститут космічних досліджень Національної академії наук України та Державного космічного агентства України
просп. Академіка Глушкова, к. 4/1, 40, Київ-187, Україна, 03187

²Інститут ядерних досліджень Національної академії наук України
просп. Науки 47, Київ-028, Україна, 03028
E-mails: oleg.cheremnykh@gmail.com, ikdcheremnykh@gmail.com,
vlashkin62@gmail.com, fedorenkoak@gmail.com

Плоскі внутрішні гравітаційні хвилі з довільною амплітудою

Для аналітичного опису поширення внутрішніх гравітаційних хвиль у верхній атмосфері Землі зазвичай використовують нелінійні рівняння, які називаються рівняннями Стенфлю. За допомогою цих рівнянь раніше були отримані розв'язки у вигляді дипольних вихорів, трипольних вихорів та вихрових ланцюжків. Рівняння Стенфлю також описують хвилі-вбивці, брізери та темні солітони. Відомо, що коли збурення перестають бути малими, їхні профілі зазвичай деформуються і передбачається, що їх не можна подавати у вигляді плоских хвиль. У цій роботі показано, що для внутрішніх гравітаційних хвиль це не завжди так, і що навіть за великих амплітуд ці хвилі можуть поширюватися у вигляді плоских хвиль. Приведено точний розв'язок системи нелінійних рівнянь Стенфлю для внутрішніх гравітаційних хвиль, що містять нелінійні доданки у вигляді дужок Пуассона. Розв'язок отримано у вигляді плоских хвиль з довільною амплітудою. Для пошуку розв'язку вихідну систему рівнянь було розщеплено на рівняння для функцій струму та завихреності, а також на рівняння для збуреної щільності. Для розв'язування отриманих рівнянь застосовано процедуру послідовного занулення дужок Пуассона. В результаті були отримані лінійні рівняння, які дозволяють знайти точні аналітичні розв'язки для внутрішніх гравітаційних хвиль у вигляді плоских хвиль з довільною амплітудою. Розв'язавши ці лінійні рівняння двома різними

способами, ми аналітично знайшли вирази для збурених величин та дисперсійного рівняння. Отримані нами нелінійні рівняння для функції струму, завихореності та збуреної щільності можна використовувати для пошуку інших нелінійних розв'язків. Приведені розв'язки у вигляді плоских хвиль з довільною амплітудою можуть становити інтерес для аналізу поширення внутрішніх гравітаційних хвиль в атмосфері Землі та інтерпретації експериментальних даних.

Ключові слова: внутрішня гравітаційна хвиля, система нелінійних рівнянь, функція струму.

ВСТУП

Внутрішні гравітаційні хвилі (ВГХ) разом з акустичними та еванесцентними хвилями складають широкий спектр акустико-гравітаційних хвиль [2, 3, 6, 10, 11, 34, 35], які є предметом експериментального і теоретичного дослідження упродовж багатьох років. Ці хвилі є одним із основних механізмів поширення природних та антропогенних збурень в атмосфері Землі. Цікавість до ВГХ значною мірою пов'язана з тим, що вони є найбільш інтенсивною частиною спектру акустико-гравітаційних хвиль та спричиняють суттєвий вплив на динаміку атмосфер планет та Сонця. Їхнє дослідження також вмотивоване необхідністю отримання прогнозів динаміки атмосфери Землі.

Лінійна теорія ВГХ, розвинена у класичних роботах [2, 3, 6, 10, 11, 34, 35], залишається актуальною і сьогодні [7, 21, 33]. Наприклад, нещодавно досліджено нестабільність модуляції ВГХ, яка призводить до виникнення зональних струмів [12], а також вплив сил Коріоліса та Ампера на спектр ВГХ [1, 4, 19]. Однак у багатьох випадках неможливо обмежитись розглядом лише лінійних ВГХ, оскільки амплітуди цих хвиль зростають експоненційно зі збільшенням висоти. Розгляд нелінійних хвиль присвячено багато робіт. Зокрема, досліджено резонансні та нерезонансні взаємодії ВГХ з вихровими модами [5, 8], досліджено нелінійний відгук іоносфери на вплив ВГХ [13], розглянуто трансформацію іоносферних збурень через взаємодію з гравітаційними хвилями [14]. В роботі [25] було виявлено ефект нелінійного насичення амплітуди вертикальної швидкості ВГХ. Також було досліджено ефект руйнування (колапс) нелінійних ВГХ у неоднорідній атмосфері [26]. Чисельне моделювання динаміки ВГХ з урахуванням нелінійних ефектів було виконано у низці робіт [8, 15, 20, 24, 29].

Для аналітичного опису динаміки ВГХ у верхній атмосфері Землі в роботах [30—32] було отримано нелінійні рівняння, які зазвичай називають рівняннями Стенфло. За допомогою цих рівнянь отримано розв'язки у вигляді дипольних вихорів [27, 28, 30, 32], трипольних вихорів та вихрових ланцюжків [16, 17]. Рівняння Стенфло у роботах [18, 23] були узагальнені на випадок слабо іонізованої атмосфери та показано, що узагальнені рівняння також допускають розв'язки у фор-

мі дипольних вихорів. У нещодавній роботі [22] було показано, що рівняння Стенфло описують «хвилі-вбивці», брізери та «темні» солітони.

В даній роботі ми наводимо ще один розв'язок рівнянь Стенфло. Як зазначалось вище, коли збурення перестають бути малими, їхні профілі зазвичай деформуються та передбачається, що їх не можна представити у вигляді плоских хвиль. Однак виявляється, що для ВГХ це не завжди так. Ми покажемо, що навіть за великих амплітуд ці хвилі можуть поширюватися у вигляді плоских хвиль без деформування.

ПЕРЕТВОРЕННЯ РІВНЯНЬ

Система нелінійних рівнянь Стенфло для ВГХ має вигляд [30, 32]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{4H^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{g}{x} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

де $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — двовимірний лапласіан, $\{f, g\}$ — дужки Пуассона, $\psi(t, x, z)$ — функція струму, $\psi(t, x, z)$ — нормована збурена щільність (плавучість), t — час, x та z — осі абсцис та аплікат декартових координат, у яких вісь z спрямована проти гравітаційного прискорення. Рівняння (1), (2) отримано для ізотермічної атмосфери (термосфери), яка в незбуреному стані вважається статично рівноважною, а рівноважна щільність змінюється з висотою за барометричним законом $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -\frac{1}{H}$. Тут $H = \frac{k_B T_0}{\bar{m}g}$, T_0 — фонова температура, k_B — стала Больцмана, \bar{m} — середня маса частинки атмосферного газу, g — прискорення вільного падіння. У зроблених припущеннях частота Брента — Вайсяля $\omega_g = (g/H)^{1/2}$, наявна у виразі (2), не залежить від вертикальної координати z .

Для пошуку аналітичного розв'язку нелінійних рівнянь (1), (2) переформулюємо їх. Вважатимемо, що функції ψ і ρ задовольняють умови

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Рівняння (3) добре відоме в гідродинаміці і часто використовується для опису плоского вихрового руху нев'язкої рідини. Наявну у цьому рівнянні функцію ψ зазвичай називають завихреністю. Рівняння (4) враховує очевидний зв'язок збуреної щільності зі збуреним рухом середовища.

При виконанні умов (3) (4) дужки Пуассона у (1), (2) скорочуються, і в результаті отримуємо рівняння

$$\frac{1}{t} \frac{1}{4H^2} \frac{1}{z} \frac{1}{x}, \quad (5)$$

$$\frac{1}{t} \frac{1}{x} \frac{1}{g^2}. \quad (6)$$

Рівняння (5), (6) будуть узгоджені між собою, якщо виконується рівність

$$\frac{1}{g^2} \frac{1}{4H^2} \frac{1}{x}. \quad (7)$$

З урахуванням (7) рівняння (5), (6) зводяться до одного й того самого рівняння

$$\frac{1}{t} \frac{1}{4H^2} \frac{1}{g^{1/2} x}. \quad (8)$$

Таким чином, ми переформулювали та розширили систему рівнянь (1), (2), додавши завихреність до функції струму та збуреної щільності середовища. Для пошуку цих величин ми маємо три рівняння: (3), (7) та (8). При цьому рівняння (3), (8) для функції струму та завихреності «відщепились» від рівняння (7) для збуреної щільності, тому їхні розв'язки можуть бути знайдені незалежно. Якщо відомі функції та, за допомогою (7) знаходиться.

РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ

Структура рівнянь (3), (7) та (8) наводить на думку, що якщо функція () лінійна, то вони також стають лінійними, а їхні розв'язки достатньо легко знайти.

Оберемо функцію завихреності () у вигляді

$$() k^2. \quad (9)$$

У цьому випадку рівняння (3) зводиться до відомого рівняння Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} k^2 = 0, \quad (10)$$

для якого методом розділення змінних отримуємо

$$\exp(ik_x x + ik_z z), \quad k^2 = k_x^2 + k_z^2. \quad (11)$$

Тому з урахуванням залежності функції від часу її можна записати у вигляді

$$A_0 \exp(i t - i k_x x - i k_z z), \quad (12)$$

де A_0 — довільна (не мала) амплітуда.

Підстановкою (9) до (7) можна показати, що збурена щільність пропорційна функції струму:

$$j_g = k_x^2 - k_z^2 \frac{1}{4H^2} \quad (13)$$

При отриманні (13) використовувався вираз для k із (11).

З (8), (9) та (12) отримуємо дисперсійне рівняння

$$\frac{k_x^2 - k_z^2}{[k_x^2 - k_z^2 - 1/(4H^2)]^{1/2}} = g \quad (14)$$

Видно, що хвилі можуть існувати лише за умови

Рівняння (12) — (14) є точними розв'язками рівнянь (3), (7) і (8), а отже і рівнянь (1), (2).

Покажемо, що розв'язки рівнянь (3), (7) і (8) можна отримати іншим методом. Шукатимемо розв'язок цих рівнянь в автомобільній формі. Вважаємо, що у величинах x та t змінні x та t залежать від однієї біжучої змінної $\xi = x + ct$, де параметр $c = \text{const}$ потрібно визначити. Функцію ψ , наприклад, з урахуванням біжучої змінної можна записати у вигляді

$$\psi(t, x, z) = \psi(\xi, z)$$

Використовуючи правила диференціювання складної функції, отримаємо

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (15)$$

З (8) і (15) після нескладних перетворень випливає

$$\frac{1}{4H^2} = \frac{g}{c} \quad (16)$$

Звідси знаходимо вираз для завихреності

$$\frac{g}{c} = \frac{1}{4H^2} \quad (16)$$

Із (3) і (16) отримаємо рівняння для ψ :

$$\Delta \psi - \frac{g}{c} \psi = 0 \quad (17)$$

Тут згідно з (15) враховано, що лапласіан Δ_1 має вигляд

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

З рівняння (17) методом розділення змінних знаходимо

$$u_0 \exp[ik_x(x - ct) + ik_z z], \quad (18)$$

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{g}{c} = \frac{1}{4H^2}. \quad (19)$$

Із (19) випливає

$$c = \frac{g}{[k_x^2 + k_z^2 + 1/(4H^2)]^{1/2}}. \quad (20)$$

Підстановка (16) і (20) в (7) дає рівняння (13). Якщо перепозначити $c = c/k_x$, тоді рівняння (18) матиме вигляд рівняння (12), а рівняння (20) — рівняння (14). Незважаючи на деяку штучність використаного методу, ми отримали той самий розв'язок у вигляді рівнянь (12)—(14).

Добре відомо, що в лінійному дисперсному середовищі плоска хвиля і будь-який пакет плоских хвиль з часом розпливаються за рахунок дисперсії. Оскільки ми не застосовуємо процедуру лінеаризації, то рівняння (12)—(14) є точними розв'язками нелінійних рівнянь (1), (2). Вони описують плоскі хвилі з довільною амплітудою, які з часом не змінюють своєї форми.

ВИСНОВКИ

В роботі представлено точний розв'язок системи нелінійних рівнянь Стенфлю для внутрішніх гравітаційних хвиль у вигляді плоских хвиль з довільною амплітудою. Для розв'язку нелінійних рівнянь (1), (2) ми переформулювали ці рівняння, зануливши дужки Пуассона, і в результаті отримали нелінійні рівняння (3), (7) та (8). Для спрощення та розв'язування отриманих рівнянь застосовано процедуру виключення нелінійних доданків. В результаті отримано лінійні рівняння, які дають можливість отримати точні аналітичні розв'язки для внутрішніх гравітаційних хвиль у вигляді плоских хвиль із довільною амплітудою. Отримані нами нелінійні рівняння (3), (7) та (8) можуть бути використані для знаходження інших нелінійних розв'язків.

Зазначимо, що у рівняннях Стенфлю можна враховувати в'язкість, тертя та теплопровідність. У такому випадку рівняння істотно ускладняться. Їхні розв'язки можна отримати, мабуть, тільки чисельними розрахунками. Тому знайдений нами точний розв'язок може бути корисним для побудови чисельних схем розв'язування таких рівнянь.

Отримані результати справедливі для термосфери Землі з майже постійною по висоті температурою. Результати роботи є корисними для аналітичного опису поширення ВГХ в атмосфері, а також для інтерпретації експериментальних даних з космічних апаратів.

1. Черемних О. К., Черемних С. О., Власов Д. І. Вплив обертання атмосфери Землі на спектр акустико-гравітаційних хвиль. *Кінематика і фізика небес. тіл.* 2022. 38, № 3. С. 3—19. <https://doi.org/10.15407/kfnt2022.03.003>.
2. Beer T. Supersonic generation of atmospheric waves. *Nature.* 1973. 242(5392). P. 34. doi:10.1038/242034a0.
3. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Selivanov Y. A., Cheremnykh S. O. Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 2021. 503. P. 5545—5553. DOI: 10.1093/mnras/stab845.
4. Cheremnykh O., Kaladze T., Selivanov Yu., Cheremnykh S. Evanescent acoustic-gravity waves in a rotating stratified atmosphere. *Adv. in Space Research.* 2022. 69. P. 1272—1280. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.10.050>.
5. Dong B., Yeh K. C. Resonant and nonresonant wave-wave interactions in an isothermal atmosphere. *Geophys. Res.* 1998. 93. P. 3729—3744. DOI: 10.1029/JD093iD04p03729.
6. Francis S. H. Global propagation of atmospheric gravity waves: A review. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 1975. 37. P. 1011—1054. DOI: 10.1016/0021-9169(75)90012-4.
7. Fritts D. C., Alexander M. J. Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Rev. Geophys.* 2003. 41. P. 1003—1062. <https://doi.org/10.1029/2001RG000106>.
8. Fritts D. C., Laughman B., Lund T. S., Snively J. B. Self-acceleration and instability of gravity wave packets: 1. Effects of temporal localization. *J. Geophys. Res. Atmos.* 2015. 120. P. 8783—8803. <https://doi.org/10.1002/2015JD023363>.
9. Fritts D. C., Sun S., Wang D.-Y. Wave-wave interactions in a compressible atmosphere 1. A general formulation including rotation and wind shear. *J. Geophys. Res.* 1992. 97. P. 9975—9988. DOI: 10.1029/92JD00347.
10. Gossard E. E., Hooke W. H. *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation* (Elsevier Scientific Publishing Company, 1975).
11. Hines C. O. Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 1960. 38. P. 1441—1481. <https://doi.org/10.1029/GM018p0248>.
12. Horton W., Kaladze T. D., Van Dam J. W., Garner T. W. Zonal flow generation by internal gravity waves in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 2008. 13, A08312. <https://doi.org/10.1029/2007JA012952>.
13. Huang C. S., Li J. Weak nonlinear theory of the ionospheric response to atmospheric gravity waves in the F-region. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 1991. 53. P. 903—908.
14. Huang C. S., Li J. Interaction of atmospheric gravity solitary waves with ion acoustic solitary waves in the ionospheric F-region. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 1992. 54. P. 951—956.
15. Huang K. M., Zhang S. D., Yi F., Huang C. M., Gan Q., Gong Y., Zhang Y. H. Nonlinear interaction of gravity waves in a nonisothermal and dissipative atmosphere. *Ann. Geophys.* 2014. 32. P. 263—275.
16. Jovanović D., Stenflo L., Shukla P. K. Acoustic gravity tripolar vortices. *Phys. Lett. A.* 2001. 279. P. 70—74.

17. Jovanović D., Stenflo L., Shukla P. K. Acoustic-gravity nonlinear structures. *Nonlin. Proc. Geophys.* 2002. 9. P. 333—339. <https://doi.org/10.5194/npg-9-333-2002>.
18. Kaladze T. D., Misra A. P., Roy A., Chatterjee D. Nonlinear evolution of internal gravity waves in the Earth's ionosphere: Analytical and numerical approach. *Adv. Space Res.* 2022. 69. P. 3374—3385. DOI:10.1016/j.asr.2022.02.014.
19. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. Acoustic-gravity waves in the Earth's ionosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2008. 70. P. 1607—1616. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2008.06.009>.
20. Kshevetskii S. P., Gavrilov N. M. Vertical propagation, breaking and effects of nonlinear gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 2005. 67. P. 1014—1030. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2005.02.013>.
21. Lashkin V. M., Cheremnykh O. K. Acoustic-gravity waves in quasiisothermal atmospheres with a random vertical temperature profile. *Wave Motion.* 2023. 119. 103140. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2023.103140>.
22. Lashkin V. M., Cheremnykh O. K. Nonlinear internal gravity waves in the atmosphere: Rogue waves, breathers and dark solitons. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2024. 130. 107757. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107757>.
23. Misra A. P., Roy A., Chatterjee D., Kaladze T. D. Internal gravity waves in the Earth's ionosphere. *IEEE Trans. Plasma Sci.* 2022. 50. P. 2603—2608. DOI: 10.1109/TPS.2022.3178133.
24. Mixa T., Fritts D., Lund T., Laughman B., Wang L., Kantha L. Numerical simulations of high-frequency gravity wave propagation through fine structures in the mesosphere. *J. Geophys. Res. Atmos.* 2019. 124. P. 9372—9390. <https://doi.org/10.1029/2018JD029746>.
25. Nekrasov A. K. Nonlinear saturation of atmospheric gravity waves. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 1994. 56. P. 931—937.
26. Nekrasov A. K., Erokhin N. S. Self-influence of the collapsing internal gravity wave in the inhomogeneous atmosphere. *Phys. Lett. A.* 2005. 335. P. 417—423. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.11.062>.
27. Onishchenko O., Pokhotelov O., Fedun V. Convective cells of internal gravity waves in the Earth's atmosphere with finite temperature gradient. *Ann. Geophys.* 2013. 31. P. 459—462. <https://doi.org/10.5194/angeo-31-459-2013>.
28. Shukla P. K., Shaikh A. A. Dust-acoustic gravity vortices in a nonuniform dusty atmosphere. *Phys. Scripta.* 1998. T75. P. 247—248. 10.1238/Physica.Topical.075a00247.
29. Snively J. B. Nonlinear gravity wave forcing as a source of acoustic waves in the mesosphere, thermosphere, and ionosphere. *Geophys. Res. Lett.* 2017. 44. P. 12020—12027. <https://doi.org/10.1002/2017GL075360>.
30. Stenflo L. Acoustic solitary waves. *Phys. Fluids.* 1987. 30. P. 3297—3299. <https://doi.org/10.1063/1.866458>.
31. Stenflo L. Acoustic gravity vortices. *Phys. Scripta.* 1990. 41. P. 641—642.
32. Stenflo L., Shukla P. K. Nonlinear acoustic-gravity waves. *J. Plasma Phys.* 2009. 75. P. 841—847. <https://doi.org/10.1017/S00223778090007892>.
33. Sutherland B. R. *Internal Gravity Waves* (Cambridge University Press, Cambridge, 2015).
34. Tolstoy I. Long-period gravity waves in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 1967. 72. P. 4605—4610. <https://doi.org/10.1029/JZ072i018p04605>.

35. Yeh K. C., Liu C. H. Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. 1974. *Rev. Geophys. Space Phys.* 12. P. 193—216. <https://doi.org/10.1029/RG012i002p00193>.

REFERENCES

1. Cheremnykh O. K., Cheremnykh S. O., Vlasov D. I. (2022). The influence of the Earth's atmosphere rotation on the spectrum of acoustic-gravity waves. *Kinematics and Phys. Celestial Bodies.* 38, 121—131.
2. Beer T. (1973). Supersonic generation of atmospheric waves. *Nature.* 242(5392) 34—34. doi:10.1038/242034a0.
3. Cheremnykh O. K., Fedorenko A. K., Selivanov Y. A., Cheremnykh S. O. (2021). Continuous spectrum of evanescent acoustic-gravity waves in an isothermal atmosphere. *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 503. 5545—5553. DOI: 10.1093/mnras/stab845.
4. Cheremnykh O., Kaladze T., Selivanov Yu., Cheremnykh S. (2022). Evanescent acoustic-gravity waves in a rotating stratified atmosphere. *Adv. in Space Res.* 69. 1272—1280. <https://doi.org/10.1016/j.asr.2021.10.050>.
5. Dong B., Yeh K. C. (1998). Resonant and nonresonant wave-wave interactions in an isothermal atmosphere. *Geophys. Res.* 93. 3729—3744. DOI: 10.1029/JD093iD04p03729.
6. Francis S. H. (1975). Global propagation of atmospheric gravity waves: A review. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 37. 1011—1054. DOI: 10.1016/0021-9169(75)90012-4.
7. Fritts D. C., Alexander M. J. (2003). Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere. *Rev. Geophys.* 41. 1003—1062. <https://doi.org/10.1029/2001RG000106>.
8. Fritts D. C., Laughman B., Lund T. S., Snively J. B. (2015). Self-acceleration and instability of gravity wave packets: 1. Effects of temporal localization. *J. Geophys. Res. Atmos.* 120. 8783—8803. <https://doi.org/10.1002/2015JD023363>.
9. Fritts D. C., Sun S., Wang D.-Y. (1992). Wave-wave interactions in a compressible atmosphere 1. A general formulation including rotation and wind shear. *J. Geophys. Res.* 97. 9975—9988. DOI: 10.1029/92JD00347.
10. Gossard E. E., Hooke W. H. *Waves in the Atmosphere: Atmospheric Infrasound and Gravity Waves: Their Generation and Propagation* (Elsevier Scientific Publishing Company, 1975).
11. Hines C. O. (1960). Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights. *Can. J. Phys.* 38. 1441—1481. <https://doi.org/10.1029/GM018p0248>.
12. Horton W., Kaladze T. D., Van Dam J. W., Garner T. W. (2008). Zonal flow generation by internal gravity waves in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 13, A08312. <https://doi.org/10.1029/2007JA012952>.
13. Huang C. S., Li J. (1991). Weak nonlinear theory of the ionospheric response to atmospheric gravity waves in the F-region. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 53. 903—908.
14. Huang C. S., Li J. (1992). Interaction of atmospheric gravity solitary waves with ion acoustic solitary waves in the ionospheric F-region. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 54. 951—956.
15. Huang K. M., Zhang S. D., Yi F., Huang C. M., Gan Q., Gong Y., Zhang Y. H. (2014). Nonlinear interaction of gravity waves in a nonisothermal and dissipative atmosphere. *Ann. Geophys.* 32. 263—275.
16. Jovanović D., Stenflo L., Shukla P. K. (2001). Acoustic gravity tripolar vortices. *Phys. Lett. A.* 279. 70—74.

17. Jovanović D., Stenflo L., Shukla P. K. (2002). Acoustic-gravity nonlinear structures. *Nonlin. Proc. Geophys.* 9. 333—339. <https://doi.org/10.5194/npg-9-333-2002>.
18. Kaladze T. D., Misra A. P., Roy A., Chatterjee D. (2022). Nonlinear evolution of internal gravity waves in the Earth's ionosphere: Analytical and numerical approach. *Adv. Space Res.* 69. 3374—3385. DOI:10.1016/j.asr.2022.02.014.
19. Kaladze T. D., Pokhotelov O. A., Shan H. A., Shan M. I., Stenflo L. (2008). Acoustic-gravity waves in the Earth's ionosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 70. 1607—1616. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2008.06.009>.
20. Kshevetskii S. P., Gavrilov N. M. (2005). Vertical propagation, breaking and effects of nonlinear gravity waves in the atmosphere. *J. Atmos. Sol.-Terr. Phys.* 67. 1014—1030. <https://doi.org/10.1016/j.jastp.2005.02.013>.
21. Lashkin V. M., Cheremnykh O. K. (2023). Acoustic-gravity waves in quasiisothermal atmospheres with a random vertical temperature profile. *Wave Motion.* 119. 103140. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2023.103140>.
22. Lashkin V. M., Cheremnykh O. K. (2024). Nonlinear internal gravity waves in the atmosphere: Rogue waves, breathers and dark solitons. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 130. 107757. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107757>.
23. Misra A. P., Roy A., Chatterjee D., Kaladze T. D. (2022). Internal gravity waves in the Earth's ionosphere. *IEEE Trans. Plasma Sci.* 50. 2603—2608. DOI: 10.1109/TPS.2022.3178133.
24. Mixa T., Fritts D., Lund T., Laughman B., Wang L., Kantha L. (2019). Numerical simulations of high-frequency gravity wave propagation through fine structures in the mesosphere. *J. Geophys. Res. Atmos.* 124. 9372—9390. <https://doi.org/10.1029/2018JD029746>.
25. Nekrasov A. K. (1994). Nonlinear saturation of atmospheric gravity waves. *J. Atmos. and Terr. Phys.* 56. 931—937.
26. Nekrasov A. K., Erokhin N. S. (2005). Self-influence of the collapsing internal gravity wave in the inhomogeneous atmosphere. *Phys. Lett. A.* 335. 417—423. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2004.11.062>.
27. Onishchenko O., Pokhotelov O., Fedun V. (2013). Convective cells of internal gravity waves in the Earth's atmosphere with finite temperature gradient. *Ann. Geophys.* 31. 459—462. <https://doi.org/10.5194/angeo-31-459-2013>.
28. Shukla P. K., Shaikh A. A. (1998). Dust-acoustic gravity vortices in a nonuniform dusty atmosphere, *Phys. Scripta.* T75. 247—248. 10.1238/Physica.Topical.075a00247.
29. Snively J. B. (2017). Nonlinear gravity wave forcing as a source of acoustic waves in the mesosphere, thermosphere, and ionosphere. *Geophys. Res. Lett.* 44. 12020—12027. <https://doi.org/10.1002/2017GL075360>.
30. Stenflo L. (1987). Acoustic solitary waves. *Phys. Fluids.* 30. P. 3297—3299. <https://doi.org/10.1063/1.866458>.
31. Stenflo L. (1990). Acoustic gravity vortices. *Phys. Scripta.* 41. 641—642.
32. Stenflo L., Shukla P. K. (2009). Nonlinear acoustic-gravity waves. *J. Plasma Phys.* 75. 841—847. <https://doi.org/10.1017/S0022377809007892>.
33. Sutherland B. R. *Internal Gravity Waves* (Cambridge University Press, Cambridge, 2015).
34. Tolstoy I. (1967). Long-period gravity waves in the atmosphere. *J. Geophys. Res.* 72. 4605—4610. <https://doi.org/10.1029/JZ072i018p04605>.

35. Yeh K. C., Liu C. H. (1974). Acoustic-gravity waves in the upper atmosphere. *Rev. Geophys. Space Phys.* 12. 193—216. <https://doi.org/10.1029/RG012i002p00193>.

*O. K. Cheremnykh*¹, *O. S. Cheremnykh*¹, *V. M. Lashkin*^{2,1}, *A. K. Fedorenko*¹

¹Space Research Institute of the National Academy of Sciences of Ukraine
and the State Space Agency of Ukraine

²Institute for Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine

PLANE INTERNAL GRAVITY WAVES WITH ARBITRARY AMPLITUDE

The non-linear equations called the Stenflo equations are usually used for the analytical description of the propagation of internal gravity waves in the Earth's upper atmosphere. The solutions in the form of dipole vortices, tripole vortices and vortex chains were previously obtained with the help of these equations. The Stenflo equations also describe rogue waves, breathers, and dark solitons. It is known that when disturbances cease to be small, their profiles are usually deformed and it is assumed that they cannot be represented in the form of plane waves. This paper shows that this is not always the case for internal gravity waves and that even at large amplitudes these waves can propagate as plane waves. An exact solution of the system of nonlinear Stenflo equations for internal gravity waves containing nonlinear terms in the form of Poisson brackets is presented. The solution is obtained in the form of plane waves with an arbitrary amplitude. To find a solution, the original system of equations was transformed. We split it into equations for the stream functions and vorticity functions, as well as equations for the perturbed density. To solve the obtained equations, the procedure of successive zeroing of Poisson brackets was applied. As a result, linear equations were obtained, that allow finding the accurate analytical solutions for internal gravity waves in the form of plane waves with arbitrary amplitude. By solving these linear equations in two different ways, we analytically found expressions for the perturbed quantities and the dispersion equation. The nonlinear equations we obtained for the current, vorticity, and perturbed density functions can be used to find other nonlinear solutions. The presented solutions in the form of plane waves with an arbitrary amplitude may be of interest for the analysis of the propagation of internal gravity waves in the Earth's atmosphere and the interpretation of experimental data.

Keywords: internal gravitational wave, system of nonlinear equations, stream function

Стаття надійшла до редакції 05.06.2024

Після доопрацювання 14.06.2024

Прийнята до друку 20.06.2024