
КИНЕМАТИКА

И ФИЗИКА

НЕБЕСНЫХ

ТЕЛ

ТОМ 33 № 1 (193) январь — февраль 2017

НАЦИОНАЛЬНАЯ
АКАДЕМИЯ НАУК
УКРАИНЫ

ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКИ
И АСТРОНОМИИ

НАУЧНО-
ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

Основан в январе 1985 г. ● Выходит 6 раз в год ● Киев

СОДЕРЖАНИЕ

Внегалактическая астрономия

Федоров Ю. И., Шахов Б. А., Колесник Ю. Л. Интенсивность галактических космических лучей в эпоху молодого Солнца 3

Соболенко М. А., Берцик П. П., Шпурзем Р., Кули Г. Быстрое слияние пост-ньютоновских двойных сверхмассивных черных дыр в реальных галактиках 21

Космическая физика

Черемных С. О., Жук И. Т. Дискретные УНЧ-моды в магнитосфере Земли вблизи минимума альвеновской частоты 38

CONTENTS

Extragalactic Astronomy

Fedorov Yu. I., Shakhov B. A., Kolesnyk Yu. L. Intensity of galactic cosmic rays in the early Sun epoch 3

Sobolenko M., Berczik P., Spurzem R., Kuli G. Fast coalescence of post-Newtonian Supermassive Black Hole Binaries in real galaxies 21

Space Physics

Cheremnykh S. O., Zhuk I. T. Discrete ULF modes in the Earth's magnetosphere near the Alfvén frequency minimum 38

© Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины, 2017

КИЇВ 2017

Физика Солнца

Solar Physics

Криводубский В. Н. Двойные максимумы 11-летних солнечных циклов

55

Krivodubskij V. N. Double maxima 11-year solar cycles

УДК 523.9-72

Ю. И. Федоров, Б. А. Шахов, Ю. Л. Колесник

Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины
ул. Академика Заболотного 27, Киев, 03680
e-mails: fedorov@mao.kiev.ua, shakhov@mao.kiev.ua, kolesnyk@mao.kiev.ua

Интенсивность галактических космических лучей в эпоху молодого Солнца

На основе решения уравнения переноса исследован процесс гелиосферной модуляции интенсивности галактических космических лучей. Проанализировано пространственно-энергетическое распределение космических лучей в настоящую эпоху и в прошлом. Показано, что в далеком прошлом значения концентрации и плотности энергии космических лучей в Солнечной системе были существенно меньше современных значений. Особенно сильно модуляция интенсивности космических лучей в ранней гелиосфере проявлялась для частиц низких энергий.

ІНТЕНСИВНІСТЬ ГАЛАКТИЧНИХ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ В ЕПОХУ МОЛОДОГО СОНЦЯ, Федоров Ю. І., Шахов Б. О., Колесник Ю. Л. — На основі розв'язку рівняння переносу розглянуто процес геліосферної модуляції інтенсивності галактичних космічних променів. Проаналізовано просторово-енергетичний розподіл космічних променів у сучасну епоху і у минулому. Показано, що у далекому минулому значення концентрації та густини енергії космічних променів у Сонячній системі були суттєво меншими за сучасні значення. Особливо сильно модуляція інтенсивності космічних променів у ранній геліосфері виявлялась для частинок низьких енергій.

INTENSITY OF GALACTIC COSMIC RAYS IN THE EARLY SUN EPOCH, by Fedorov Yu. I., Shakhov B. A., Kolesnyk Yu. L. — The process of the heliospheric modulation of galactic cosmic ray intensity is investigated on the basis of transport equation solution. The spatial-energetic distributions of cosmic rays in the present epoch and in the past are analyzed. It is shown that the particle density and the cosmic ray energy density in the Solar

system were considerably reduced in the remote past. The cosmic ray intensity modulation in the early heliosphere appeared especially vigorous for the low energy particles.

ВВЕДЕНИЕ

Космические лучи (КЛ) являются источником ионизации планетных ионосфер и могут играть важную роль в процессе возникновения и эволюции жизни на Земле. Заряженные частицы высоких энергий влияют на функционирование органических соединений, приводят к радиационным клеточным повреждениям и мутациям, способствуют возникновению молний [11]. Исследования, посвященные анализу уровня радиации, вызываемой КЛ в настоящем и прошлом, вызывают большой интерес с точки зрения различных перспективных физических и биологических приложений.

Исследования молодых звезд, подобных Солнцу, показывают, что их физические характеристики существенным образом зависят от возраста [11, 17, 19, 28, 36]. Скорость вращения молодых звезд оказывается выше, магнитная активность сильнее, а рентгеновское излучение имеет большую мощность. Кроме того, скорость потери массы молодых активных звезд оказывается существенно больше [10, 29, 31, 37]. Таким образом, в отдаленном прошлом (порядка 10^9 — $3 \cdot 10^9$ лет назад) Солнце вращалось быстрее, напряженность его магнитного поля была больше, а поток массы солнечного ветра существенно превышал современное значение [10, 11, 19, 28, 31, 36].

Таким образом, в далеком прошлом размер гелиосферы был больше, а межпланетное магнитное поле характеризовалось большей напряженностью и иной топологией. Вследствие этого галактическим космическим лучам (ГКЛ) было труднее проникать внутрь Солнечной системы, а их интенсивность у Земли была существенно ниже современной [10, 11, 28, 30].

В настоящей работе исследован процесс модуляции интенсивности галактических КЛ в гелиосфере на основе приближенного решения уравнения переноса КЛ. Энергетический спектр КЛ в локальном межзвездном пространстве соответствует данным космического аппарата «Вояджер», а энергетическая зависимость транспортного пробега частиц в межпланетной среде согласована с экспериментальными данными, полученными на космических аппаратах и сети нейтронных мониторов. На основе полученного решения уравнения переноса КЛ проанализировано пространственно-энергетическое распределение ГКЛ в гелиосфере как в настоящее время, так и в прошлом. Показано, что концентрация КЛ и плотность энергии частиц в отдаленном прошлом (порядка 1—3 млрд лет назад) были существенно меньше значений, характерных для современности.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

Для расчета пространственно-энергетического распределения галактических космических лучей (КЛ) в гелиосфере используем хорошо известное уравнение переноса, которое описывает распространение заряженных частиц высокой энергии в межпланетных магнитных полях [2, 13, 21]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{N}{r} \right) - u \frac{N}{r} - \frac{2up}{3r} \frac{N}{p} = 0, \quad (1)$$

где

$$N(r, p) = d f(r, \mathbf{p}) \quad (2)$$

— концентрация частиц с данным значением импульса, $f(r, p)$ — функция распределения частиц. Интегрирование в соотношении (2) проводится по углам вектора скорости частицы. Скорость солнечного ветра u считаем радиальной и постоянной, а величина κ представляет собой коэффициент диффузии КЛ в межпланетных магнитных полях. Уравнение переноса КЛ записано в стационарном сферически симметричном случае, так что концентрация КЛ $N(r, p)$ зависит от единственной пространственной переменной — гелиоцентрического расстояния r .

Плотность потока частиц с данным значением импульса

$$\mathbf{J}(r, p) = d \mathbf{v} f(r, \mathbf{p}) \quad (3)$$

имеет вид [2, 13]

$$J(r, p) = \frac{N}{r} - \frac{up}{3} \frac{N}{p}. \quad (4)$$

Отметим, что для изотропного распределения частиц поток КЛ (3) равен нулю. Диффузионная составляющая потока частиц пропорциональна градиенту концентрации КЛ, а второе слагаемое в соотношении (4) описывает конвекционный поток КЛ, обусловленный взаимодействием быстрых заряженных частиц с электромагнитными полями солнечного ветра.

Введем безразмерные переменные согласно соотношениям

$$r / r_0, \quad (5)$$

$$p / (mc). \quad (6)$$

Величина r_0 равна гелиоцентрическому радиусу границы области модуляции ГКЛ. Таким образом, координата r представляет собой безразмерное гелиоцентрическое расстояние, которое измеряется от нуля до единицы. Переменная (6) определяет безразмерный импульс частицы (m — масса покоя частицы).

Запишем уравнение переноса КЛ (1) в безразмерных переменных:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(\frac{N}{r} \right) - \frac{N}{r} - \frac{2}{3} \frac{N}{p} = 0, \quad (7)$$

где

$$(p) = \omega r_0 / (p) \quad (8)$$

— параметр модуляции КЛ.

Предположим, что на границе области модуляции, то есть при $r = r_0$, задан спектр КЛ $N_0(p)$, который описывает энергетическое распределение заряженных частиц высокой энергии вдали от Солнечной системы. Таким образом, необходимо получить решение уравнения переноса (7), которое удовлетворяет граничному условию, заданному на сфере радиуса $r = 1$. Отметим, что в приближении постоянного коэффициента диффузии КЛ для некоторых распределений галактических КЛ $N_0(p)$ удастся получить точные аналитические решения уравнений переноса [3, 5, 8, 12]. В данной работе будем учитывать то обстоятельство, что коэффициент диффузии КЛ увеличивается при возрастании импульса частицы. Таким образом, рассеяние частиц высокой энергии на магнитных неоднородностях будет менее интенсивным, а уменьшение их интенсивности в гелиосфере, относительно интенсивности КЛ в Галактике, будет менее значительным.

Безразмерная величина (p) (8) (параметр модуляции КЛ) характеризует глубину модуляции интенсивности галактических КЛ в гелиосферных магнитных полях. Так как коэффициент диффузии КЛ является возрастающей функцией энергии частицы, то параметр модуляции КЛ (8) уменьшается при увеличении безразмерного импульса p . Отметим, что в случае ультррелятивистских частиц рассеяние на неоднородностях межпланетного магнитного поля становится пренебрежимо малым, а параметр модуляции КЛ (8) — близким к нулю, уравнение переноса КЛ (7) сводится к уравнению диффузии. Таким образом, распределение КЛ ультррелятивистских энергий внутри гелиосферы однородно, а энергетическое распределение частиц совпадает со спектром КЛ в локальном межзвездном пространстве.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Заряженные частицы КЛ эффективно рассеиваются на неоднородностях космических магнитных полей. В результате их угловое распределение становится близким к изотропному [7, 27]. При решении уравнения переноса КЛ (7) используем известный приближенный метод, основанный на малости анизотропии углового распределения частиц [9, 13, 14, 20, 33]. Диффузионный поток галактических КЛ, который направлен внутрь Солнечной системы, приблизительно уравновешивается конвекционным потоком частиц, ориентированным от Солнца. Таким образом, в нулевом приближении по малому параметру, которым является анизотропия углового распределения КЛ, поток частиц с данным значением импульса

$$J(\theta, p) = u \frac{1}{3} \frac{N}{p} \quad (9)$$

оказывается равным нулю. Таким образом, получаем следующее уравнение для определения концентрации КЛ:

$$\frac{N}{d} - \frac{N}{3} = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) представляет собой уравнение в частных производных первого порядка, характеристическое уравнение которого имеет вид

$$\frac{d}{d} - \frac{N}{3}. \quad (11)$$

Предположим, что зависимость коэффициента диффузии КЛ от импульса частицы имеет степенной вид:

$$D(p) = D_0 p^\alpha, \quad (12)$$

где α — показатель степени, D_0 — коэффициент диффузии частиц с импульсом, равным mc . Заметим, что условие $p = mc$ ($\alpha = 1$) соответствует значению кинетической энергии протона $E_k = 389$ МэВ. Выражению (12) для коэффициента диффузии КЛ соответствует следующая формула для параметра модуляции (8):

$$U(r) = U_0 r^\beta, \quad (13)$$

где

$$\beta = \frac{U_0}{D_0}. \quad (14)$$

— параметр модуляции частиц, импульс которых равен mc .

Если известно энергетическое распределение частиц на границе области модуляции $N(r=1, p) = N_0(p)$, то решение уравнений (10), (11) можно представить в виде

$$N(r, p) = N_0(p), \quad (15)$$

где

$$N_0(p) = \frac{1}{3} (1 - \beta)^{1/\alpha}. \quad (16)$$

Таким образом, на основании приближенного метода решения уравнения переноса КЛ [13, 14] получаем выражение для концентрации КЛ (15), (16). Для вычисления концентрации КЛ внутри гелиосферы ($r < 1$) необходимо задать энергетический спектр частиц в локальном межзвездном пространстве $N_0(p)$. Используем следующую форму энергетического распределения галактических КЛ вне гелиосферы [5, 8, 12]:

$$N_0(p) = q_0 (1 - \beta)^{1/\alpha}, \quad (17)$$

где q_0 — постоянная величина, которая может быть выражена, например, через плотность энергии КЛ в локальной межзвездной среде.

Отметим, что подобная форма энергетического распределения галактических КЛ использовалась в ряде работ по распространению КЛ [16, 22, 26, 32]. Известно, что в области высоких энергий спектр галактических КЛ степенной, и $\alpha = 4.7$ [23, 27, 34]. Показатель степени можно найти из сравнения со спектром ГКЛ вне гелиосферы, который приведен в работе [18] ($\alpha = 1.34$). Отметим, что при приведенных значениях параметров α , спектр КЛ (17) согласуется с энергетическим распределением галактических КЛ, измеренным космическим аппаратом «Вояджер-1» после того, как он покинул пределы гелиосферы в августе 2012 г. [18, 23, 24, 34, 35].

Следуя методу, развитому в работе [9], построим приближение решения уравнения переноса КЛ. Запишем уравнение переноса КЛ (7) в следующем виде [12, 15]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 J - \frac{1}{p^2} \frac{d}{dp} p^2 J_p = 0, \quad (18)$$

где J — поток КЛ (4), а величина

$$J_p = \frac{up}{3} \frac{N}{r} \quad (19)$$

представляет собой поток частиц в пространстве абсолютных значений импульса. Проинтегрировав уравнение переноса КЛ (18) по пространственной переменной r , получим следующее соотношение для плотности потока частиц:

$$J = \frac{u}{3p^2 r^2} \int_0^r dr r^2 - \frac{2}{r p} p^3 N. \quad (20)$$

Интегрируя соотношение (20) по частям и переходя к безразмерным переменным, получим

$$J(\alpha, \beta) = \frac{u}{3} \int_0^{\beta} d\alpha - \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} d\alpha - \frac{2}{\alpha} N(\alpha, \beta). \quad (21)$$

При вычислении потока частиц (21) используем приближенное соотношение для концентрации КЛ $N(\alpha, \beta)$ (15), (16) и выражение для немодулированного спектра галактических КЛ (17). В результате получим соотношение

$$J(\alpha, \beta) = u \left[1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta^2} N_0(\beta) \right] - \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} d\alpha \left[1 - \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\beta^2} N_0(\beta) \right], \quad (22)$$

где переменная α определена соотношением (16), а функция $N_0(\beta)$ задана формулой (17).

Найдем следующее приближение решения уравнения переноса КЛ по малости анизотропии углового распределения частиц $N_1(\theta, \varphi)$. Приравняв выражение для потока КЛ (9) полученному соотношению (22), которое вычислено на основе приближенного соотношения для концентрации КЛ (15), (16), получим уравнение

$$\frac{N_1}{3} - \frac{(\theta)}{3} \frac{N_1}{3} = (\theta, \varphi). \quad (23)$$

Правая часть данного уравнения определена соотношением

$$(\theta, \varphi) = \frac{(\theta)}{u} J(\theta, \varphi), \quad (24)$$

а поток КЛ $J(\theta, \varphi)$ удовлетворяет соотношению (22). Так как концентрация КЛ (15) удовлетворяет граничному условию $N(\theta=1, \varphi) = N_0(\theta)$, то величина N_1 должна быть равна нулю в точке $\theta = 1$. Решение уравнения (23), удовлетворяющее нулевому граничному условию на сфере радиуса $\theta = 1$, имеет вид [9]

$$N_1(\theta, \varphi) = d \int_1^\theta \frac{(\theta')}{3} (\theta', \varphi) d\theta'. \quad (25)$$

Таким образом, приближенное решение уравнения переноса КЛ (7) может быть записано в виде суммы

$$N(\theta, \varphi) = N_0(\theta) + N_1(\theta, \varphi), \quad (26)$$

где $N_0(\theta)$ — немодулированный спектр КЛ (17), переменная θ определена формулой (16), а величина N_1 представлена соотношением (25).

Для определения параметра θ_0 (14) воспользуемся данными об интенсивности галактических КЛ на орбите Земли, приведенными в работе [25]. При кинетической энергии протонов 500 МэВ отношение их интенсивности на орбите Земли к интенсивности КЛ за гелиопаузой равно 0.27 [25]. Такой глубине модуляции КЛ данной энергии соответствуют следующие значения параметров $\theta_0 = 1.6$, $\beta = 1$. Отметим, что при таком выборе параметров полученные значения интенсивности КЛ на орбите Земли хорошо согласуются с данными наблюдений в интервале энергий протонов от 100 МэВ до 100 ГэВ [25].

На рис. 1 представлена пространственная зависимость относительной концентрации КЛ от безразмерного гелиоцентрического расстояния. Концентрация частиц $N(\theta, \varphi)$ (26) нормирована на концентрацию КЛ на границе области модуляции $N_0(\theta)$ (17). Числа у кривых равны значениям кинетической энергии частиц. Параметр модуляции КЛ θ_0 (14) определяется соотношением (13) при значениях параметров $\theta_0 = 1.6$, $\beta = 1$. Концентрация ГКЛ монотонно увеличивается с гелиоцентрическим расстоянием. Видно, что чем выше энергия частиц, тем слабее гелиосферная модуляция интенсивности КЛ (рис. 1). Так, например, интенсивность КЛ с энергией 50 ГэВ на орбите Земли меньше

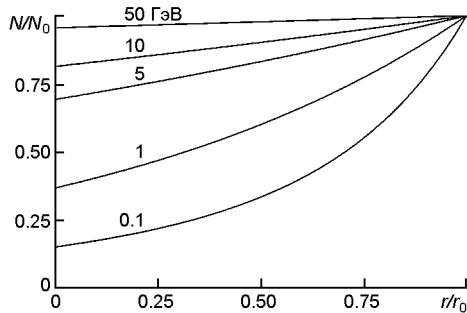


Рис. 1. Зависимость концентрации частиц данной энергии от гелиоцентрического расстояния

соответствующего значения в локальном межзвездном пространстве всего на 5 %. А для частиц, кинетическая энергия которых равна 100 МэВ, отношение концентрации КЛ у Земли к немодулированной концентрации КЛ равно 0.15.

Интенсивность КЛ $I(r, p)$ пропорциональна концентрации частиц и определяется соотношением [1]:

$$I(r, p) = \frac{1}{4} p^2 N(r, p). \quad (27)$$

Полученные соотношения для концентрации КЛ позволяют вычислить интенсивность ГКЛ на разных гелиоцентрических расстояниях. Зависимость интенсивности КЛ от кинетической энергии частиц представлена на рис. 2. Выбраны значения параметров $\rho_0 = 1.6$, $\beta = 1$. Числа у кривых соответствуют значению безразмерного гелиоцентрического расстояния r/r_0 . Верхняя кривая соответствует немодулированному спектру КЛ, а нижняя — энергетическому распределению частиц на орбите Земли. На рис. 2 приведена безразмерная величина $I/(q_0 p_0^2)$, пропорциональная интенсивности частиц. Предполагается, что границей области модуляции КЛ является гелиопауза, расположенная на гелиоцентрическом расстоянии $r_0 = 120$ а. е. Видно, что при высоких энергиях модуляция интенсивности КЛ становится слабой, а энергетические спектры КЛ внутри гелиосферы близки к спектру галактических КЛ в локальном межзвездном пространстве (рис. 2). В области низких энергий (20...100 МэВ) глубина модуляции становится существенной, а интенсивность КЛ внутри Солнечной системы оказывается значительно ослабленной (рис. 2). Например, интенсивность

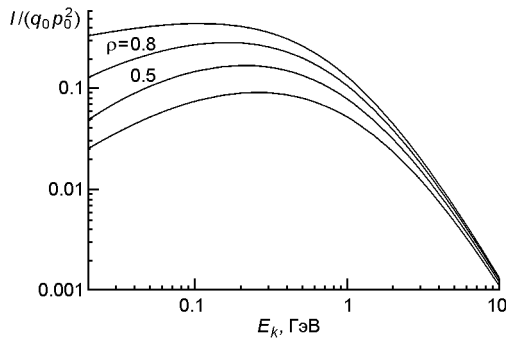


Рис. 2. Энергетическая зависимость интенсивности КЛ на различных гелиоцентрических расстояниях. Верхняя кривая — немодулированный спектр КЛ, нижняя — энергетическое распределение ГКЛ на орбите Земли

частиц с энергиями 100 МэВ оказывается почти на порядок величины меньше, чем на границе области модуляции. С уменьшением гелиоцентрического расстояния максимум спектра смещается в сторону высоких энергий. Так, например, энергетическое распределение ГКЛ на гелиопаузе имеет максимум в области энергий 110 МэВ, а на орбите Земли интенсивность максимальна при энергии 260 МэВ.

ИНТЕНСИВНОСТЬ ГАЛАКТИЧЕСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В ПРОШЛОМ

Перейдем к оценке интенсивности галактических КЛ в прошлом, когда структура гелиосферы определялась характеристиками раннего Солнца. Интенсивность КЛ зависит от размеров гелиосферы, скорости солнечного ветра, геометрии межпланетного магнитного поля и рассеивательных свойств межпланетной среды. Все эти характеристики ранней гелиосферы были совершенно иными 1...3 млрд лет тому назад [10, 18, 28, 29, 31, 36, 37].

Поток массы солнечного ветра в прошлом существенно отличался от современного уровня. Согласно наблюдательным данным поток массы звездных ветров молодых звезд солнечного типа уменьшается с их возрастом [11, 28, 29, 31, 36]. Вследствие большего давления солнечного ветра размер гелиосферы в прошлом был больше современного. Есть различные оценки размеров астросфер молодых звезд типа Солнца [10, 11, 36, 37]. В наших расчетах интенсивности КЛ в прошлом (порядка 10^9 ... $3 \cdot 10^9$ лет назад) мы использовали относительно небольшой размер области модуляции r_0 , который превышает современную величину всего на одну треть [11]. Так как в данную эпоху $r_0 = 120$ а. е., то будем полагать, что гелиопауза в прошлом имела радиус $r_0 = 160$ а. е. Отметим, что в этом случае параметр модуляции КЛ (8), который пропорционален характерному размеру гелиосферы r_0 , также увеличится на одну треть.

Скорость вращения Солнца с возрастом уменьшается, так что период его вращения 3 млрд лет назад был гораздо меньше [11, 17, 19, 30, 36, 37]. Известно, что скорость вращения звезды коррелирует с магнитной активностью, так что при старении звезды ее магнитное поле и поток электромагнитного излучения в рентгеновском диапазоне уменьшаются [11, 29, 30, 36, 37]. По оценке, приведенной в работе [11], напряженность среднего магнитного поля Солнца 1...2 млрд лет назад была в 1.2...1.4 раза больше. Если транспортный пробег пропорционален ларморову радиусу частицы [7, 11, 23], то в соответствующее число раз коэффициент диффузии КЛ в прошлом был меньше современного значения.

Таким образом, усиление магнитной активности Солнца приводит к увеличению параметра модуляции КЛ (8), и следовательно, уменьшению интенсивности ГКЛ в гелиосфере в прошлом.

Модуляция КЛ существенным образом зависит от геометрии крупномасштабного гелиосферного магнитного поля [7, 11, 23]. Силовые линии межпланетного магнитного поля имеют спиральную конфигурацию и хорошо описываются моделью, впервые предложенной Паркером [6]. Так как в прошлом скорость вращения Солнца была существенно выше, то спиральные силовые линии были сильнее закручены, а азимутальная составляющая магнитного поля в данной точке пространства была больше. Перенос частиц поперек среднего магнитного поля оказывается затрудненным, так что поперечный коэффициент диффузии КЛ в межпланетной среде примерно на два порядка величины меньше, чем коэффициент диффузии частиц вдоль магнитного поля [7, 11, 23, 27]. Быстрое вращение молодого Солнца обуславливает большую напряженность крупномасштабного магнитного поля и более плотную упаковку и большую кривизну магнитных силовых линий. Такая геометрия межпланетного магнитного поля более эффективно препятствует проникновению внутрь Солнечной системы релятивистских заряженных частиц галактического происхождения [11].

Напряженность крупномасштабного межпланетного магнитного поля в точке с гелиоцентрическими координатами r , дается соотношениями [6, 7]

$$H(r, \theta) = \frac{r_0^2}{r^2} H_{0r} \sqrt{1 - \frac{r}{u} \omega^2 \sin^2 \theta}, \quad (28)$$

где H_{0r} — радиальная составляющая магнитного поля у Солнца, r_0 — радиус Солнца, u — скорость солнечного ветра, ω — угловая скорость вращения Солнца. При скорости солнечного ветра $u = 4 \cdot 10^7$ см/с и угловой скорости вращения современного Солнца $\omega = 2.7 \cdot 10^{-6}$ с⁻¹, величина $r/u\omega^2$, которая входит в соотношение (28), на орбите Земли близка к единице. При увеличении скорости вращения звезды увеличиваются как магнитное поле H_{0r} у ее поверхности, так и последний множитель в формуле (28). Большие значения напряженности межпланетного поля (28) в прошлом приводят к соответственно меньшим значениям коэффициента диффузии КЛ, и следовательно, к увеличению параметра модуляции КЛ (8).

Оценим влияние изменения кривизны силовых линий крупномасштабного магнитного поля на перенос быстрых частиц в гелиосфере. Приведем компоненты единичного вектора $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$, соответствующие модели Паркера крупномасштабного межпланетного магнитного поля [6, 7]:

$$h_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r}{u} \omega^2 \sin^2 \theta}}, \quad h_\theta = \frac{r}{u} \omega^2 \sin \theta \cos \theta, \quad h_\phi = 0. \quad (29)$$

Пусть θ — угол между магнитной силовой линией и радиальным направлением, тогда

$$\operatorname{tg} \frac{h}{h_r} = \frac{r}{u} \sin \theta. \quad (30)$$

Видно, что при увеличении частоты вращения угол увеличивается, а относительная величина азимутальной составляющей магнитного поля увеличивается.

Радиальный поток КЛ определен формулой (4), причем коэффициент диффузии имеет вид

$$D_{\parallel} \cos^2 \theta + D_{\perp} \sin^2 \theta, \quad (31)$$

где D_{\parallel} и D_{\perp} — соответственно параллельный и перпендикулярный коэффициенты диффузии КЛ. Известно, что в гелиосферных магнитных полях выполняется неравенство $D_{\perp} \ll D_{\parallel}$ [7, 11, 23, 27]. Представим величину D_{\parallel} в виде [11, 23]

$$D_{\parallel} = D_0 \beta, \quad (32)$$

где величина $\beta = 0.02 \dots 0.05$ в межпланетной среде [7, 11, 23], тогда радиальный коэффициент диффузии КЛ (31) приобретает вид

$$D_{\parallel} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}. \quad (33)$$

Радиальный коэффициент диффузии КЛ (33) зависит от гелиоцентрических координат r , θ . Усредним величину D_{\parallel} по полярному углу:

$$\langle D_{\parallel} \rangle = \frac{1}{2} D_0 \beta \int_0^{\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} D_0 \beta \int_0^{\pi} \frac{1 - (r/u)^2 \sin^2 \theta}{1 + (r/u)^2 \sin^2 \theta} d\theta. \quad (34)$$

Оценки среднего коэффициента диффузии КЛ (34) показывают, что при значениях $\beta = 0.02$ и $r = 1$ а. е. при увеличении угловой скорости вращения Солнца в три раза коэффициент диффузии КЛ (34) также увеличивается в три раза. На расстоянии десять астрономических единиц от Солнца и при тех же значениях параметров коэффициент диффузии КЛ увеличивается в два раза относительно современного значения. Таким образом, вследствие более быстрого вращения Солнца в прошлом коэффициент диффузии КЛ порядка миллиарда лет назад был, вероятно, существенно меньше современного.

Следовательно, для ранней гелиосферы характерен большой поток массы солнечного ветра, большая величина напряженности магнитного поля в солнечной короне и вне ее, другая геометрия крупномасштабного гелиосферного магнитного поля, обусловленная быстрым вращением Солнца. Все эти факторы приводят к увеличению параметра модуляции КЛ (8), и вследствие этого — к уменьшению интенсивности ГКЛ в гелиосфере.

По-видимому, наибольшее влияние на изменение параметра модуляции КЛ (8) с течением времени оказывает коэффициент диффузии КЛ. Напряженность межпланетного магнитного поля в прошлом была выше и изменялась со временем пропорционально $t^{0.6}$ [11,

30]. Следовательно, три миллиарда лет назад напряженность гелиосферного магнитного поля была примерно в два раза больше, а ларморов радиус частицы — в два раза меньше. Если транспортный пробег частицы пропорционален ларморову радиусу, то и коэффициент диффузии КЛ в направлении среднего магнитного поля три миллиарда лет назад был примерно в два раза меньше. Используя соотношения и графики, приведенные в работе [17], можно оценить период вращения Солнца в прошлом. Оказывается, что три миллиарда лет назад скорость вращения Солнца была примерно в два раза выше [17]. Таким образом, спиральные силовые линии межпланетного магнитного поля в далеком прошлом были существенно более закручены, а эффективный коэффициент диффузии КЛ — существенно меньше. Если учесть значение напряженности межпланетного магнитного поля и изменение формы магнитных силовых линий, то три миллиарда лет назад величина коэффициента диффузии КЛ была приблизительно в четыре раза меньше современного значения. Принимая во внимание увеличение размера гелиосферы на 30 %, приходим к выводу, что параметр модуляции КЛ (8) три миллиарда лет назад превышал современное значение примерно в пять раз.

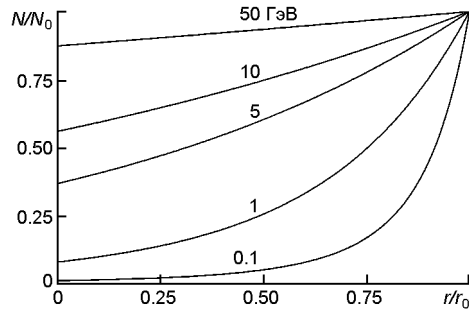
Допустим, что параметр модуляции КЛ изменяется со временем согласно соотношению

$$(t) = \varphi_0 \exp(-t/T_0),$$

где φ_0 — параметр модуляции КЛ в настоящую эпоху, t — интервал времени, прошедшего до настоящего момента. Учитывая, что при $t = 3 \cdot 10^9$ лет $\varphi = 5 \varphi_0$, получим $T_0 = 1.86 \cdot 10^9$ лет. Согласно данной оценке 1.3 млрд лет назад параметр модуляции КЛ был примерно в два раза больше современного, 2 млрд лет назад он превышал современное значение в три раза, а 3 млрд лет назад был приблизительно в пять раз больше.

Предположим, что энергетический спектр космических лучей в локальном межзвездном пространстве в прошлом определялся приведенным соотношением (17), а гелиопауза располагалась на гелиоцентрическом расстоянии 160 а. е., которое превышает современное значение на одну треть. На рис. 3 приведена зависимость относительной концентрации КЛ от гелиоцентрического расстояния при следующих значениях параметров: $\varphi_0 = 4.8$, $\beta = 1$. Отметим, что по сравнению с рис. 1 параметр модуляции выбран в три раза большим (приблизительно 2 млрд лет назад). Числа у кривых соответствуют значениям кинетической энергии протонов. Видно, что концентрация ГКЛ данной энергии монотонно увеличивается с гелиоцентрическим расстоянием (рис. 3). Однако в данном случае имеет место значительно более существенное уменьшение концентрации галактических КЛ внутри гелиосферы (рис. 1 и 3). Например, при значении $\varphi_0 = 3.2$ (1.3 млрд лет назад) интенсивность частиц с энергиями 100 МэВ меньше соответствующего значения интенсивности при значении параметра $\varphi_0 = 1.6$

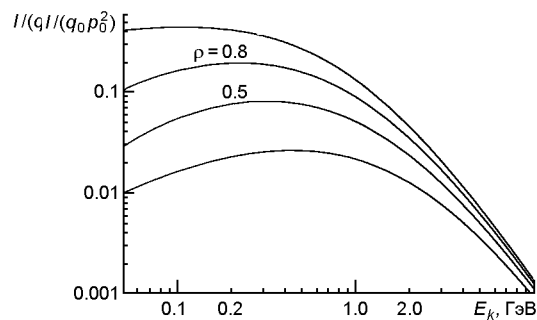
Рис. 3. Зависимость концентрации КЛ от гелиоцентрического расстояния. Параметр модуляции КЛ $\phi_0 = 4.8$. Числа у кривых — значения энергии частиц



(настоящая эпоха) в 4.1 раза. Для кинетической энергии частиц $E_k = 1$ ГэВ отношение этих величин равно 2.2. Еще существеннее становятся данные отличия для того периода времени в прошлом, когда параметр модуляции КЛ был в три раза большим современного ($\phi_0 = 4.8$). Тогда отношение интенсивности протонов с энергией 100 МэВ на орбите Земли в нашу эпоху к их интенсивности в прошлом равно 12.9. При энергии КЛ 1 ГэВ концентрация ГКЛ на орбите Земли в 4.6 раза превышает соответствующее значение в прошлом. Чем дальше в прошлое, тем большее значение приобретает параметр модуляции КЛ и тем меньше становится величина интенсивности ГКЛ внутри Солнечной системы.

Зависимость интенсивности КЛ от кинетической энергии частиц приведена на рис. 4. Предполагается, что гелиопауза расположена на расстоянии $r_0 = 160$ а. е., а значения параметров равны $\phi_0 = 3.2$, $\rho = 1$. Числа у кривых равны безразмерной координате r/r_0 , верхняя кривая описывает немодулированный спектр КЛ, а нижняя кривая — энергетическое распределение частиц на орбите Земли. Значение параметра модуляции КЛ $\phi_0 = 3.2$ в два раза превышает величину параметра модуляции КЛ в нашу эпоху. Заметим, что чем более раннюю эпоху в истории гелиосферы мы рассматриваем, тем большее значение приобретает параметр модуляции КЛ (8). Видно, что при том же заданном спектре КЛ в локальном межзвездном пространстве спектры КЛ внутри гелиосферы в настоящую эпоху (рис. 2) и в прошлом (приблизительно 1.3 млрд лет тому назад) (рис. 4) оказываются существенно различными. Особенно данное различие заметно в области низких энергий КЛ. Эти частицы подвержены более интенсивному рас-

Рис. 4. Энергетические спектры ГКЛ на различных расстояниях r/r_0 (числа у кривых) от Солнца. Параметр модуляции КЛ $\phi_0 = 3.2$. Верхняя кривая — немодулированный спектр КЛ, нижняя — спектр ГКЛ на орбите Земли



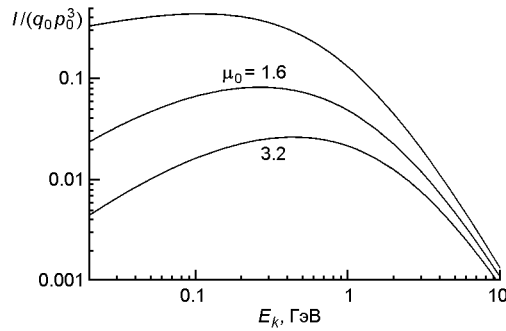


Рис. 5. Энергетические спектры КЛ на орбите Земли при различных значениях параметра модуляции μ_0 . Верхняя кривая соответствует энергетическому распределению КЛ в локальной межзвездной среде

сеянию в межпланетной среде и вследствие этого испытывают более значительную гелиосферную модуляцию. Отметим также смещение максимума энергетического распределения галактических КЛ в сторону высоких энергий при уменьшении гелиоцентрического расстояния (рис. 4).

На рис. 5 приведена зависимость интенсивности КЛ от кинетической энергии частиц в настоящую эпоху и в прошлом. Верхняя кривая соответствует немодулированному спектру галактических КЛ. Следующая кривая представляет энергетическое распределение КЛ на орбите Земли в настоящую эпоху (значение параметра модуляции $\mu_0 = 1.6$). Нижняя кривая соответствует значению $\mu_0 = 3.2$ и описывает энергетический спектр КЛ на гелиоцентрическом расстоянии $r = 1$ а. е. в прошлом (приблизительно 1.3 млрд лет тому назад). Видно, что энергетическое распределение частиц в прошлом было обеднено частицами низких энергий, а его максимальное значение соответствовало более высоким энергиям частиц (рис. 5).

Рассмотрим пространственную зависимость концентрации частиц всех энергий

$$n(r) = \int_0^{\infty} dp p^2 N(r, p). \quad (35)$$

На рис. 6 представлена зависимость концентрации КЛ (35) от безразмерного гелиоцентрического расстояния r/r_0 при различных значениях параметра модуляции КЛ μ_0 . Концентрация $n(r)$ нормирована на значение концентрации частиц $n(1)$ на гелиопаузе. Значения параметра модуляции μ_0 приведены у соответствующих кривых. В

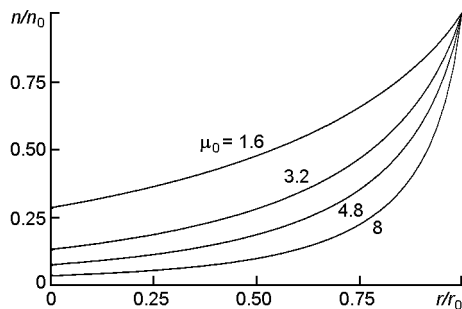


Рис. 6. Зависимость концентрации КЛ (35) от гелиоцентрического расстояния при различных значениях параметра модуляции

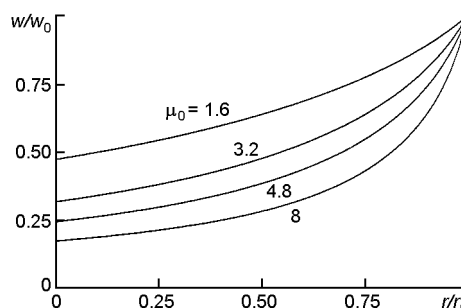
настоящую эпоху ($\mu_0 = 1.6$) концентрация галактических КЛ на орбите Земли составляет 29 % от концентрации КЛ в Галактике. Если параметр модуляции КЛ в прошлом был в пять раз больше современного (примерно 3 млрд лет тому назад), то значение концентрации КЛ на орбите Земли составляло всего 3 % галактического значения (рис. 6).

Плотность энергии КЛ имеет вид

$$w(r) = \int_0^r dp p^2 EN(r, p), \quad (36)$$

где E — энергия частицы. Полученные соотношения для концентрации КЛ позволяют вычислить плотность энергии частиц на данном гелиоцентрическом расстоянии. Например, на орбите Земли в настоящую эпоху получаем значение $w = 0.47w_0$, где w_0 — плотность энергии КЛ в локальном межзвездном пространстве. Если средняя плотность энергии КЛ в Галактике составляет величину порядка 1 эВ/см^3 [1, 4, 27], то на расстоянии одной астрономической единицы от Солнца получим $w = 0.47 \text{ эВ/см}^3$. Пространственная зависимость плотности энергии КЛ (36) представлена на рис. 7. Числа у кривых равны значениям параметра μ_0 , а значение плотности энергии КЛ нормировано на соответствующее значение на границе объема модуляции. Нижняя кривая на рис. 7 соответствует значению параметра модуляции КЛ $\mu_0 = 8$, эта величина превышает современное значение μ_0 в пять раз. Оказывается, что при этой величине параметра модуляции

Рис. 7. Зависимость плотности энергии ГКЛ от гелиоцентрического расстояния



КЛ плотность энергии КЛ на орбите Земли составляет $w = 0.17 \text{ эВ/см}^3$, которая в шесть раз меньше плотности энергии КЛ в Галактике. Плотность энергии КЛ на орбите Земли в прошлом (в эпоху, соответствующую значению $\mu_0 = 8$, т. е. примерно 3 млрд лет назад) оказывается в 2.7 раза меньше современного значения (рис. 7).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Согласно литературным данным поток массы солнечного ветра в прошлом был существенно больше, скорость вращения Солнца выше, а магнитная активность молодого Солнца выше, чем в современную эпоху [11, 19, 29, 30, 36, 37]. Данные обстоятельства обуславливали

большой размер области модуляции КЛ и более интенсивное рассеяние заряженных частиц высокой энергии в магнитных полях гелиосферы в прошедшие эпохи. Около трех миллиардов лет назад концентрация галактических КЛ у Земли была на порядок величины, а плотность энергии КЛ в несколько раз меньше современных значений. Особенно сильно была ослаблена интенсивность частиц низких энергий (порядка 100 МэВ и ниже). Таким образом, приходим к выводу, что более молодой гелиосфере соответствовала более низкая интенсивность ГКЛ.

Следует заметить, что интенсивность ГКЛ внутри Солнечной системы испытывает вариации различных периодов, которые обусловлены неоднородностью концентрации КЛ в различных областях Галактики, наличием в межзвездной среде молекулярных облаков и локальных «пузырей». В таких локальных «пузырях», в одном из которых находится гелиосфера в настоящую эпоху, давление межзвездного газа меньше среднего галактического [11]. Это обстоятельство влияет на размер гелиосферы и, таким образом, — на интенсивность КЛ в Солнечной системе. При прохождении Солнечной системой галактических рукавов, в которых давление межзвездного газа повышенное, также уменьшаются характерные размеры гелиосферы и вследствие этого увеличивается интенсивность КЛ. Кроме того, интенсивность галактических КЛ внутри спиральных рукавов плотности, вероятно, выше, чем в областях Галактики, расположенных между рукавами. Данные обстоятельства вызывают изменение фона галактических КЛ в Солнечной системе с периодами от десятков до сотен миллионов лет [11].

Работа выполнена в рамках проекта «Роль нормальных и экстремальных гелио-геофизических процессов в эволюции биосферы» — Грант НАНУ № 36-02-14.

1. Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л., Догель В. А., Птускин В. С. Астрофизика космических лучей. — М.: Наука, 1984.—380 с.
2. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. Многократное рассеяние частиц в магнитном поле со случайными неоднородностями // Журн. эксперим. и теор. физ.—1966.—51, вып. 6.—С. 1771—1783.
3. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. О диффузии космических лучей в межпланетной среде // Геомагнетизм и аэрномия.—1967.—7, № 6.—С. 967—973.
4. Дорман Л. И. Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей. — М.: Наука, 1975.—464 с.
5. Колесник Ю. Л., Шахов Б. А. Влияние гелиопаузы и стоячей ударной волны на распространение галактических космических лучей в стационарной модели гелиосферы // Кинематика и физика небес. тел.—2012.—28, № 6.—С. 3—16.
6. Паркер Е. Н. Динамические процессы в межпланетной среде. — М.: Мир, 1965.—362 с.
7. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. — М.: Наука, 1983.—302 с.

8. Федоров Ю. И. Модуляция интенсивности галактических космических лучей в турбулентной гелиосфере // Кинематика и физика небес. тел.—2015.—**31**, № 3.—С. 3—22.
9. Шахов Б. А., Колесник Ю. Л. Итерационный метод решения краевых задач теории распространения космических лучей // Кинематика и физика небес. тел.—2006.—**22**, № 2.—С. 100—108.
10. Cleeves L. I., Adams F. C., Bergin E. A. Exclusion of cosmic rays in protoplanetary discs: Stellar and magnetic effects // *Astrophys. J.*—2013.—**772**, N 1.—id. 5 (20 p).
11. Cohen O., Drake J. J., Kota J. The cosmic ray intensity near the archean Earth // *Astrophys. J.*—2012.—**760**.—P. 85.
12. Dorman L. I., Katz M. E., Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. Variation of cosmic-ray energy in interplanetary space // *Astrophys. and Space Sci.*—1983.—**94**.—P. 43—95.
13. Gleeson L. J., Axford W. I. Solar modulation of galactic cosmic rays // *Astrophys. J.*—1968.—**154**.—P. 1011—1026.
14. Gleeson L. J., Urch I. H. A study of the force-field equation for the propagation of galactic cosmic rays // *Astrophys. and Space Sci.*—1973.—**25**.—P. 387—404.
15. Gleeson L. J., Webb G. M. Energy changes of cosmic rays in the interplanetary region // *Astrophys. and Space Sci.*—1978.—**58**.—P. 21.
16. Goldstein M. L., Ramaty R., Fisk L. A. Interstellar cosmic ray spectra from the non-thermal radio background from 0.4 to 400 MHz // *Phys. Rev. Lett.*—1970.—**24**, N 21.—P. 1193—1196.
17. Guinan E. F., Engle S. G. The Sun in time: age, rotation, and magnetic activity of the Sun and solar-type stars and effects on hosted planets // *The ages of stars: Proc. IAU Symp. N 258 / Eds E. E. Mamajek, D. Soderblom.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2009.—12 p.
18. Guo X., Florinski V. Galactic cosmic ray modulation near the heliopause // *Astrophys. J.*—2014.—**793**.—id. 18 (12 p.).
19. Johnstone C. P., Gudel M., Brott I., Lufthinger T. Stellar winds on the main sequence // Arxiv: 1503.07494 [astroph.]—2015.
20. Moraal H. Cosmic-ray modulation equations // *Space Sci. Revs.*—2013.—**176**, N 1-4.—P. 299—319.
21. Parker E. N. The passage of energetic charged particles through interplanetary space // *Planet. and Space Sci.*—1965.—**13**, N 1.—P. 9.
22. Perko J. S. Solar modulation of galactic antiprotons // *Astron. and Astrophys.*—1987.—**184**, N 1.—P. 119—121.
23. Potgieter M. S. Solar modulation of cosmic rays // *Liv. Rev. Solar Phys.*—2013.—**10**.—P. 3—66.
24. Potgieter M. S. A very local interstellar spectrum for galactic electrons, protons and helium // *Proc. 33-rd Int. Cosmic Ray Conf.* — Rio de Janeiro, Brasil, 2013, Highlight Talk, icrc2013-1300.
25. Potgieter M. S., du Strauss R. T. At what rigidities does the solar modulation of galactic cosmic rays begin? // *Proc. 33-rd Int. Cosmic Ray Conf.* — Rio de Janeiro, Brasil, 2013.—icrc2013-0156.
26. Ptuskin V. S., Volk H. J., Zirakashvili V. N., Breitschwerdt D. Transport of relativistic nucleons in a galactic wind driven by cosmic rays // *Astron. and Astrophys.*—1997.—**321**, N 2.—P. 434—443.
27. Schlickeiser R. *Cosmic ray astrophysics.* — Berlin: Springer, 2002.—519 p.
28. Shaviv N. J. Towards a solution to the early faint Sun paradox: A lower cosmic ray flux from a stronger solar wind // Arxiv: 0306.477 [astroph.]—2003.

29. *Sterenberg M. G., Cohen O., Drake J. J., Gombosi T. I.* Modeling the young Sun's solar wind and its interaction with Earth's paleomagnetosphere // *J. Geophys. Res.*—2011. —**116**.—P. A01217.
30. *Suzuki T. K.* Evolution of solar-type stellar wind // *Arxiv: 1301.2359 [astroph.]*.—2013.
31. *Svensmark H.* Cosmic rays and the evolution of Earth's climate during the last 4.6 billion years // *Astron. Nachr.*—2006.—**327**.—N 9.—P. 871.
32. *Urch I. H., Gleeson L. J.* Galactic cosmic ray modulation from 1965-1970 // *Astrophys. and Space Sci.*—1972.—**17**.—P. 426—446.
33. *Usoskin I. G., Alanko-Huotaki K., Kovaltsov G. A., Mursula K.* Heliospheric modulation of cosmic rays: Monthly reconstruction for 1951—2004 // *J. Geophys. Res.*—2005.—**110**.—P. A12108.
34. *Webber W. R., Hiegbie P. R., McDonald F. B.* The unfolding of the spectra of low energy galactic cosmic ray H and He nuclei as the Voyager 1 spacecraft exits the region of heliospheric modulation // *Arxiv: 1308. 1895 [astroph.]*.—2013.
35. *Webber W. R., McDonald F. B.* Recent Voyager 1 data indicate that on 25 August 2012 at a distance of 121.7 AU from the Sun, sudden and unprecedented intensity changes were observed in anomalous and galactic cosmic rays // *Geophys. Res. Lett.*—2013. —**40**.—P. 1665—1668.
36. *Wood B. E., Muller H.-R., Redfield S., Edelman E.* Evidence for a weak wind from the young Sun // *Astrophys. J. Lett.*—2014.—**781**, N 2.—id. L33 (5 p.).
37. *Wood B. E., Muller H.-R., Zank G. P., Linsky J. L.* Measured mass-loss rates of solar-like stars as a function of age and activity // *Astrophys. J.*—2002.—**574**, N 1.—P. 412—425.

Статья поступила в редакцию 03.03.16

UDK 524.882

M. Sobolenko¹, P. Berczik^{1,2,4}, R. Spurzem^{2,3,4}, G. KUPI⁵

¹Main Astronomical Observatory National Academy of Sciences of Ukraine
27 Akademika Zabolotnoho St., 03680, Kyiv, Ukraine
sobolenko@mao.kiev.ua,

²National Astronomical Observatories of China and Key Laboratory of Computational Astrophysics
Chinese Academy of Sciences, 20A Datun Rd., Chaoyang District, 100012, Beijing, China

³Kavli Institute for Astronomy and Astrophysics
Peking University, Beijing 100871, China

⁴Astronomisches Rechen-Institut, Zentrum für Astronomie, University of Heidelberg
Mönchhofstrasse 12-14, 69120, Heidelberg, Germany

⁵Rochester Institute of Technology
Rochester, NY 14623, USA

Fast coalescence of post-Newtonian Supermassive Black Hole Binaries in real galaxies

We present the results of theoretical modeling of supermassive black hole binary (SMBHB) mergers using direct 2-body simulations with a Hermite integration scheme. The BH's gravitational interaction is described based on the post-Newtonian (\mathcal{PN} terms) approximation up to the 3.5 \mathcal{PN} terms. We carry out a large set of runs using a parametric description of SMBHB orbits. The final time of the SMBHBs gravitational coalescence is parametrized as a function of initial eccentricity e_0 and mass ratio q of the binary. We carry out detailed tests of our coding. We tested our \mathcal{PN} terms against the analytic prescription described at the theoretical works in middle 60th. The gravitational radiation polarization amplitudes h_+ and h_\times from the SMBHBs merging process are also analyzed. Based on our numerical work we estimate the expected merging time for a list of selected potential SDSS SMBHBs. Our results show that the merging time is a strong function of the assumed initial eccentricities and fall within the range of thousands years.

ШВИДКЕ ЗЛИТТЯ ПОСТНЬЮТОНІВСЬКИХ ПОДВІЙНИХ НАДМАСИВНИХ ЧОРНИХ ДІР У РЕАЛЬНИХ ГАЛАКТИКАХ, Соболєнко М. О., Берцик П. П., Шпурзем Р., Купі Г. — Приводяться результати теоретичного моделювання злиття подвійних надмасивних чорних дір за допомогою прямого 2-тільного моделювання з ермітівською схемою інтегрування. Гравітаційна взаємодія чорних дір описується постньютонівським наближенням до 3.5 \mathcal{PN} -терму. На основі параметричного опису орбіт ПНЧД отримано великий набір моделей.

Кінцевий час гравітаційного злиття ПНЧД параметризовано як функцію початкового ексцентриситету e_0 та відношення мас q подвійної. Проведено детальне тестування нашого коду. Ми порівнювали \mathcal{PN} -терми з аналітичним описом у теоретичних дослідженнях середини 1960-х рр. Проаналізовано амплітуду поляризованого гравітаційного випромінювання h та \dot{h} під час злиття ПНЧД. З використанням нашого числового коду оцінено очікуваний час злиття для списку вибраних потенційних SDSS ПНЧД. Наші результати показують, що час злиття досягає тисяч років та є строгою функцією обраного початкового ексцентриситету.

БЫСТРОЕ СЛИЯНИЕ ПОСТНЬЮТОНОВСКИХ ДВОЙНЫХ СВЕРХМАССИВНЫХ ЧОРНЫХ ДЫР В РЕАЛЬНЫХ ГАЛАКТИКАХ, Соболєнко М. А., Берцик П. П., Шпурзем Р., Купи Г. — Представлены результаты теоретического моделирования слияния двойных сверхмассивных чёрных дыр с помощью прямого 2-тельного моделирования с эрмитовской схемой интегрирования. Гравитационное взаимодействие чёрных дыр описывается постньютоновским приближением до 3.5 \mathcal{PN} -терма. На основе параметрического описания орбит ДСМЧД получен большой набор моделей. Конечное время гравитационного слияния ДСМЧД параметризовано как функция начального эксцентриситета e_0 и отношения масс q двойной. Проведено детальное тестирование нашего кода. Сравнивались \mathcal{PN} -термы с аналитическим описанием в теоретических исследованиях середины 1960-х гг. Проанализирована амплитуда поляризованного гравитационного излучения h и \dot{h} во время слияния ДСМЧД. С использованием нашего численного кода оценено ожидаемое время слияния для списка выбранных потенциальных SDSS ДСМЧД. Наши результаты показывают, что время слияния достигает тысяч лет и является строгой функцией выбранного начального эксцентриситета.

INTRODUCTION

The formation and evolution of galaxies and their SMBHs are connected in several ways. This relation can be found already at the early phases of protogalaxies formation [64], also at the later stages of hierarchical Λ CDM cosmology [15, 31, 63] and also during the stages of different galaxy mergers [36, 42, 51]. One of the most simple and plausible channel of the SMBH mass growth is an accumulation of the BH's mass during host-galaxy mergers. Gas accretion can significantly increase the mass of BHs during “wet” merging that triggers star formation [3, 14, 25, 45, 57, 61]. Stellar accretion can also increase BH masses even in “dry” merging during the formation the giant elliptical galaxies [5, 44, 46, 67, 71]. The M — relation, that shows a connection between the mass of the SMBH and the mass of the central bulge of their host galaxies [30], we assume is evidence for such a sce-

nario. The fact that the distribution of the most luminous and massive active galactic nuclei peaks at higher redshifts also support this idea [34]. SMBHBs inside merging galaxies could be one of the most powerful sources of gravitational waves (GW), which can be detected by the Pulsar Timing Array (PTA) or future space-based missions, such as LISA/eLISA, DESIGO/BBO [1, 33, 69]. The dynamical evolution of SMBHBs in the center of a merged stellar system can be traditionally divided in three phases [4].

(I) Two BHs can form a pair inside the merging host galaxy due to dynamical friction in the stellar background. Then these components sink into the centre of the stellar distribution. SMBHBs start to be “hard” when the length of the semimajor axis of the binary reaches the value:

$$a \leq a_h = \frac{G}{4} \frac{2.7 \text{ pc}}{1} \frac{m_2}{10^8 M_\odot} \frac{1}{200 \text{ km/s}}^2, \quad (1)$$

where G is a gravitational constant, mass of the BH’s is $m_2 = m_1$, mass ratio is $q = m_2/m_1$, $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ is a reduced mass, total mass is $M_{tot} = m_1 + m_2$. This means that the binding energy per unit mass $|E|/M_{tot} = G/2a$ exceeds $\sim v^2$ (the ambient stellar velocity dispersion) [50].

(II) Due to the slingshot interaction mechanism the binary can continue to harden via three-body scattering of single stars. If star’s orbit intersects with the SMBHB orbit, a complex three-body interaction can eventually lead to the “ejection” of the star. This “ejected” star carries away energy and angular momentum from the binary (see references in [49, 68, 70]).

But if we assume spherical symmetry, the loss cone of the binary BH system can be depleted by the slingshot mechanism before this [2, 27]. Therefore the system hardening time can be more than the Hubble time [52]. This is the so called “final parsec problem” which can be solved in N -body simulations assuming a more realistic stellar particle distribution in a rotating system [6, 39], oblate / triaxial potential [29, 38, 60] or some combination of these configurations.

(III) At the third stage the components sink toward to the separation when GW emission begins to be efficient. Finally, the binary inspirals down to the coalescence, emitting a strong GW signal. For such a merger the two SMBHBs have to reach a critical separation in a time shorter than the Hubble time (few Gyr):

$$a_{GW} \leq 2 \cdot 10^3 f(e)^{1/4} \frac{q^{1/4}}{(1+q)^{1/2}} \frac{M_{tot}^{3/4}}{10^6 M_\odot} \text{ pc}, \quad (2)$$

where $f(e) = [1 - (73/24)e^2 - (37/96)e^4](1 - e^2)^{7/2}$ is a function of the binary eccentricity e [58, 59].

To estimate the SMBHBs real merging times, we need to make our calculations with the real speed of light values. Such N -body simulations are already available in the literature (for example [38, 40]). But on the real merging galaxy scale such simulations require a lot of computing resources.

In this paper we propose a slightly different approach. We perform simulations for different sets of parameters with various “parametric” values of light speed (for example see [9]). To explore the connection between the real merging time T_{mrg} , the total mass M_{tot} of the SMBHB and initial separation R between the BHs we estimate a scaling between the merging time T_{mrg} and the speed of the light c assuming the dependence between these parameters.

NUMERICAL METHODS AND INITIAL CONDITIONS

Some numerical details. For the two BHB dynamical orbit integration, we use the publicly available GPU* [7, 8] with a 4th order Hermite integrator and block hierarchical individual time step scheme. This Hermite scheme requires us to know the acceleration and its first time-derivative, called *jerk*. Because we use this Hermite scheme for our \mathcal{PN} runs, we need to include the \mathcal{PN} corrections also to the acceleration and *jerk* terms. In the GPU code we use the generalized “Aarseth” type criteria for the time step definition [53]:

$$t = \frac{A^{(1)}}{A^{(p-2)}}^{1/(p-3)}, \quad (3)$$

where

$$A^{(k)} = \sqrt{|\mathbf{a}^{(k-1)}| |\mathbf{a}^{(k-1)}| |\mathbf{a}^{(k)}|^2}. \quad (4)$$

Here, $\mathbf{a}^{(k)}$ is the k^{th} derivative of acceleration, p is the order of the integrator, $\frac{1}{p}$ is the accuracy parameter. For a 4th-order Hermite scheme the timestep looks like:

$$t = \frac{A^{(1)}}{A^{(2)}}, \quad (5)$$

where

$$A^{(1)} = \sqrt{|\mathbf{a}^{(0)}| |\mathbf{a}^{(2)}| |\mathbf{a}^{(1)}|^2}, \quad A^{(2)} = \sqrt{|\mathbf{a}^{(1)}| |\mathbf{a}^{(3)}| |\mathbf{a}^{(2)}|^2}. \quad (6)$$

For all our runs we use the $\frac{1}{4} = 0.018$ parameter.

Post-Newtonian formalism. We use a post-Newtonian formalism in the 2-body code for calculating the relativistic binary systems dynamics. The results for up to 2 \mathcal{PN} and even up to 2.5 \mathcal{PN} equations of binary motion in harmonic coordinates were obtained by Damour and Deruelle [17–20, 24]. For the 3 \mathcal{PN} and 3.5 \mathcal{PN} terms we can use two different ways of computation. One of the possibilities is to use the ADM-Hamiltonian formalism of general relativity [22, 54–56]. Physically equivalent results [21, 23] can be obtained from the post-Newtonian iteration [11], when we compute the equation of motion directly (instead of via a Hamiltonian) in harmonic coordinates.

The equation of motion is a power series of $1/c$, where n - \mathcal{PN} is proportional to $(v/c)^{2n}$. Schematically, one can write the correction for acceleration during the motion of object in binary system as [19, 65]:

* <ftp://ftp.mao.kiev.ua/pub/berczik/phi-GPU/>

$$\mathbf{a}_{NoSpin} = \mathbf{a}_N + \frac{1}{c^2} \mathbf{a}_{1PN} + \frac{1}{c^4} \mathbf{a}_{2PN} + \frac{1}{c^5} \mathbf{a}_{2.5PN} + \frac{1}{c^6} \mathbf{a}_{3PN} + \frac{1}{c^7} \mathbf{a}_{3.5PN} + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \quad (7)$$

where \mathbf{a}_N is the classical Newtonian acceleration; \mathbf{a}_{1PN} , \mathbf{a}_{2PN} , \mathbf{a}_{3PN} are the non dissipative terms which ‘‘conserve’’ the energy of the system. The $\mathbf{a}_{2.5PN}$, $\mathbf{a}_{3.5PN}$ are the dissipative terms which ‘‘carry out’’ energy from the system due to GW emission. We apply all \mathcal{PN} corrections up to order $O(1/c^8)$, so the 3.5 \mathcal{PN} correction is the highest order that we take into account. To compare our results with the analytical solution from classical articles [58, 59] we use the code just with the single 2.5 \mathcal{PN} term.

Similar to the equation of motion in the centre of mass frame [10] the acceleration for one particle can be written in the following form:

$$\mathbf{a}_{NoSpin} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{GM}{r^2} [(1 - \mathcal{A})\mathbf{n} - \mathcal{B}\mathbf{v}], \quad (8)$$

where $r = |\mathbf{r}|$ is the separation between particles, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ is the position of the particles, $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ is the normalized relative position vector, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ is the relative velocity. The functions \mathcal{A} and \mathcal{B} contain different orders of the \mathcal{PN} approximation (similar to Eq. (7)).

For example the first \mathcal{PN} correction term is given by:

$$A_{1PN} = \frac{5Gm_1}{r} + \frac{4Gm_2}{r} - \frac{3}{2}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2)^2 - \mathbf{v}_1^2 - 4(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) - 2\mathbf{v}_2^2, \quad (9)$$

$$B_{1PN} = 4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_1) - 3(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_2). \quad (10)$$

Detailed references and the complete description of the problem can be found in works such as [9, 10, 43]. The complete equations in post-Newtonian formalism up to 3.5 \mathcal{PN} are given also in [10].

Adding the spin terms into the equation of motion we can describe as:

$$\mathbf{a}_{Spin} = \mathbf{a}_{NoSpin} + \frac{1}{c^3} \mathbf{a}_{1.5PN,SO} + \frac{1}{c^4} \mathbf{a}_{2PN,SS} + \frac{1}{c^5} \mathbf{a}_{2.5PN,SO}, \quad (11)$$

where $\mathbf{a}_{1.5PN,SO}$ and $\mathbf{a}_{2.5PN,SO}$ are the spin-orbit coupling terms, $\mathbf{a}_{2PN,SS}$ is the spin-spin coupling term (for example [26]). Now one can write the full equation (like Eq. (7)):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{Spin} = \mathbf{a}_N + \frac{1}{c^2} \mathbf{a}_{1PN} + \frac{1}{c^3} \mathbf{a}_{1.5PN,SO} + \frac{1}{c^4} (\mathbf{a}_{2PN} + \mathbf{a}_{2PN,SS}) \\ + \frac{1}{c^5} (\mathbf{a}_{2.5PN} + \mathbf{a}_{2.5PN,SO}) + \frac{1}{c^6} \mathbf{a}_{3PN} + \frac{1}{c^7} \mathbf{a}_{3.5PN} + O\left(\frac{1}{c^8}\right), \end{aligned} \quad (12)$$

where the full expression for $\mathbf{a}_{1.5PN,SO}$ and $\mathbf{a}_{2.5PN,SO}$ can be found in [26], for $\mathbf{a}_{2PN,SS}$ can be found in [66]. The value of the physical spin is chosen from the the next expression:

$$S^{true} = \frac{Gm^2}{c}, \quad (13)$$

where the value of χ is [0, 1]. At the centre of the binary mass frame we have the spin $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$. We use two body dynamics and spin-spin and spin-orbit

coupling just for calculation of the first order of the gravitational waveform constraint (e.g. [41]):

$$h^{ij} = \frac{4G}{Dc^4} \ddot{v}^i v^j - \frac{GM}{r} n^i n^j, \quad (14)$$

where $Q^{ij} = 2(\ddot{v}^i v^j - GMn^i n^j / r)$ is the usual quadrupole term (second time derivatives of the mass quadrupole moment tensor) and D is the luminosity distance. Choosing the virtual detector orientation so that as the coordinate axes coincide with the source frame, we can describe the two-dimensional matrix with only two independent elements:

$$h_{ij} = \begin{pmatrix} h & h \\ h & h \end{pmatrix}. \quad (15)$$

From h_{ij} we can obtain the amplitude of polarization h_+ and h_\times [12, 16, 62].

Initial conditions and description of model. We assume that the two point masses which represents our BHs with masses m_1 and m_2 are placed at positions Y_1 and Y_2 on the Y axis (see Fig. 1). For our analyses we choose the natural coordinate system of the two bodies, connected by the centre of mass of the system. The initial orbital velocity of the two point masses we chose so that the XY plane contains the full orbit. The initial separation between the components we defined as $R = |Y_1| + |Y_2|$. We also set the BH's mass ratio $q = m_1 / m_2$. We assume that $m_1 < m_2$. We also fix the total BH system mass $M_{tot} = m_1 + m_2$. The Keplerian motion of the two bodies can be fully

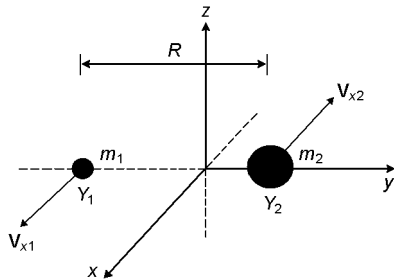


Fig. 1. Configuration of the system with two BHs

described by two main orbital parameters: the semimajor axis a and eccentricity e . We can write the binding energy of the binary system:

$$|E| = \frac{Gm_1 m_2}{2a} - \frac{G M_{tot}}{2a}, \quad (16)$$

where $\mu = m_1 m_2 / M_{tot}$ is the reduced mass. We also fix as a parameter the binary initial orbital eccentricity e_0 . The initial setup of the particles we show in Figure 1. For further calculation we assume the normalization $R = 1$ and $M_{tot} = m_1 + m_2 = 1$.

We use the N-body (NB) or called Hénon units [32] where we also accept $G = 1$ and set the mass units M and length units R to unity*. Therefore the physical values of mass, length, energy, velocity and time will be in the form:

$$[M] = M, \quad [L] = R, \quad (17)$$

$$[E] = \frac{GM^2}{R}, \quad (18)$$

$$[V] = \frac{GM}{R}^{1/2}, \quad [T] = \frac{R^3}{GM}^{1/2}. \quad (19)$$

Consequently the light speed c in N -body units is:

$$c = \frac{c_0}{V} = c_0 \frac{GM}{R}^{1/2} = 14213 \frac{M}{10^8 M_\odot}^{1/2} \frac{R}{10^3 \text{ pc}}^{1/2}, \quad (20)$$

where c_0 is the light speed in physical units.

DISCUSSION

Scaling routine between merging time T_{mrg} and “parametric” speed of the light was made for all models from Table 1 (for example see Fig. 2 for system with parameters $M_{tot} = 1$ [NB], $q = 0.5$, $R = 1$ [NB], $e_0 = 0.25$). Based on our post-Newtonian formalism (Eqs (7)-(12)) we can theoretically expect the relationship between merging time (which is directly proportional to the energy losses in our post-Newtonian formalism) and the light speed:

$$T_{mrg} \approx b c^5, \quad T_{mrg5} \approx d c^5 p c^7, \quad (21)$$

where b , d and p are the coefficients of the scaling. As we can see from Fig. 2 the difference between the two merging times are negligible. So, in this paper we use the T_{mrg5} as a basic approximation for the binary merging time T_{mrg} .

Table 1. The scale factor b from Eq. (21) for various mass ratio q and initial eccentricity e_0 (separation for each system $R = 1$ [NB] and total mass $M_{tot} = 1$ [NB])

e_0	b					
	$q = 1$	$q = 0.5$	$q = 0.333$	$q = 0.25$	$q = 0.2$	$q = 0.02$
0.00	7.863E-02	8.827E-02	1.043E-01	1.218E-01	1.397E-01	8.611E-01
0.25	2.578E-02	2.900E-02	3.437E-02	4.027E-02	4.639E-02	3.375E-01
0.50	5.584E-03	6.280E-03	7.440E-03	8.716E-03	1.004E-02	7.244E-02
0.75	4.648E-04	5.225E-04	6.186E-04	7.243E-04	8.339E-04	6.003E-03
0.95	1.893E-06	2.126E-06	2.514E-06	2.938E-06	3.383E-06	2.425E-05
0.99	8.146E-09	9.123E-09	1.076E-08	1.255E-08	1.441E-08	1.023E-07

* http://en.wikipedia.org/wiki/N-body_units

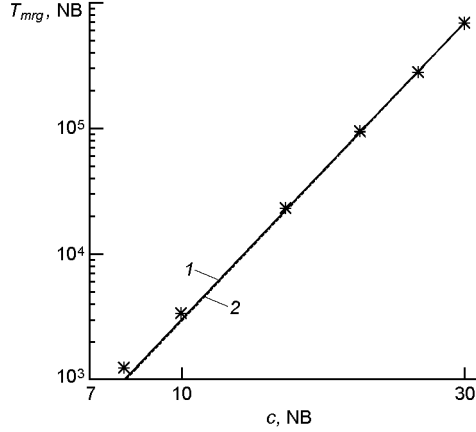


Fig. 2. Relation between the merging time T_{mrg} and light speed c for system from Table 1 (line 1 — $T_{mrg} = bc^5$, 2 — $T_{mrg} = dc^5 + pc^7$, stars — simulation). Initial eccentricity $e_0 = 0.25$ and mass ratio $q = 0.5$

We study the evolution of systems with various mass ratios and initial eccentricities, i. e. with various orbits. We use the following sets of the parameters: $q = 1, 0.5, 0.333, 0.25, 0.2, 0.02$ and $e = 0.00, 0.25, 0.50, 0.75, 0.95, 0.99$.

We apply the scaling factors from Table 1 to find the real merging times T_{mrg} (in physical units) where the physical light speed is $c = 2.99792458 \cdot 10^8$ m/s.

We apply the above described “c-scaling procedure” for a wide range of physical parameters for masses ($10^6 M_\odot \leq M_{tot} \leq 5 \cdot 10^9 M_\odot$) and the initial separation between the BHs ($10^3 \leq R \leq 10^2$ pc). For each individual model we estimate the relation between the merging time T_{mrg} , separation between the BHs R and total mass M_{tot} of the SMBHB (Fig. 3, 4). For example using Fig. 3 for system with $M_{tot} = 10^9 M_\odot$, $q = 0.5$, $R = 10$ pc, $e_0 = 0.5$ merging time $T_{mrg} = 1700$ years.

In a real cosmological merging scenario we expect that the SMBHBs merger does not evolve in isolation. High resolution cosmological numerical simulations (see references in [28, 37, 48]) show us that SMBHB mergers typically need to meet the next large galaxy in a time scale of 1-2 Gyr. If we assume the existence of a SMBH in this third galaxy too, in this case our binary BH is transformed to a triple BH system. Extensive direct N -body simulations of system with three BHs show that such a configuration is highly unstable [1, 13]. So, we assume that if in a time scale of 1-2 Gyr our original BHB system does not merge, the possibility of such a merger becomes very unlikely. In Figures 3, 4 we show the 1 Gyr merging time as the solid black lines for the different initial eccentricities.

For some fixed time this relation can be written in the form:

$$R \approx 10 (M_{SMBHB,6})^{3/4}.$$

We found that with the rise of initial eccentricity e_0 the merging time T_{mrg} of the system decreases. This behavior is valid for mass ratios from $q = 1$ to $q = 0.2$ and even for extremal $q = 0.02$. The general conclusion from our set of runs is that the lower initial eccentricity (circular) orbits generally

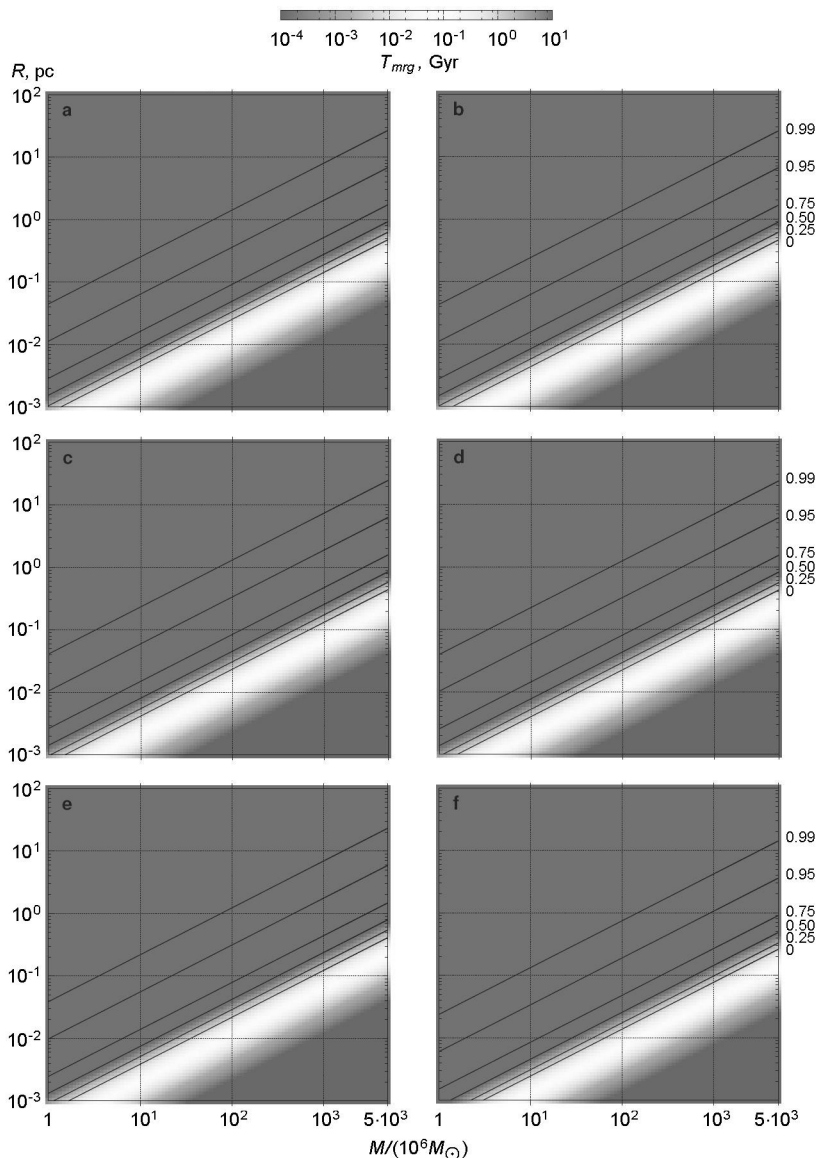


Fig. 3. The color coded final merging time T_{mrg} of SMBHB as a function of total mass and initial separation of the binary. Each separate plot shows the merging time evolution for the specific mass ratio of the binary: $q = 1$ (a), 0.5 (b), 0.333 (c), 0.25 (d), 0.2 (e), 0.02 (f). On each plots we indicate the 1 Gyr merging time line as a function of the initial eccentricity e_0 of the binary. Colored gamma for value $e_0 = 0.00$

have a longer merging time. For higher mass ratios even the eccentric orbits become more stable.

Comparison of the simulation results and theoretical work [58, 59] (which includes in the expressions only for the $2.5\mathcal{PN}$ term) is shown in (Fig. 5, 6). For this numerical test we use the parameters $M_{\text{tot}} = 2$ [NB], $q = 1$, $R = 1$ [NB], $e_0 = 0.7$, $c = 15$ [NB] and we also include only the $2.5\mathcal{PN}$ term. Our test simulations show that the numerical model behaves very similar to the theoretical curve.

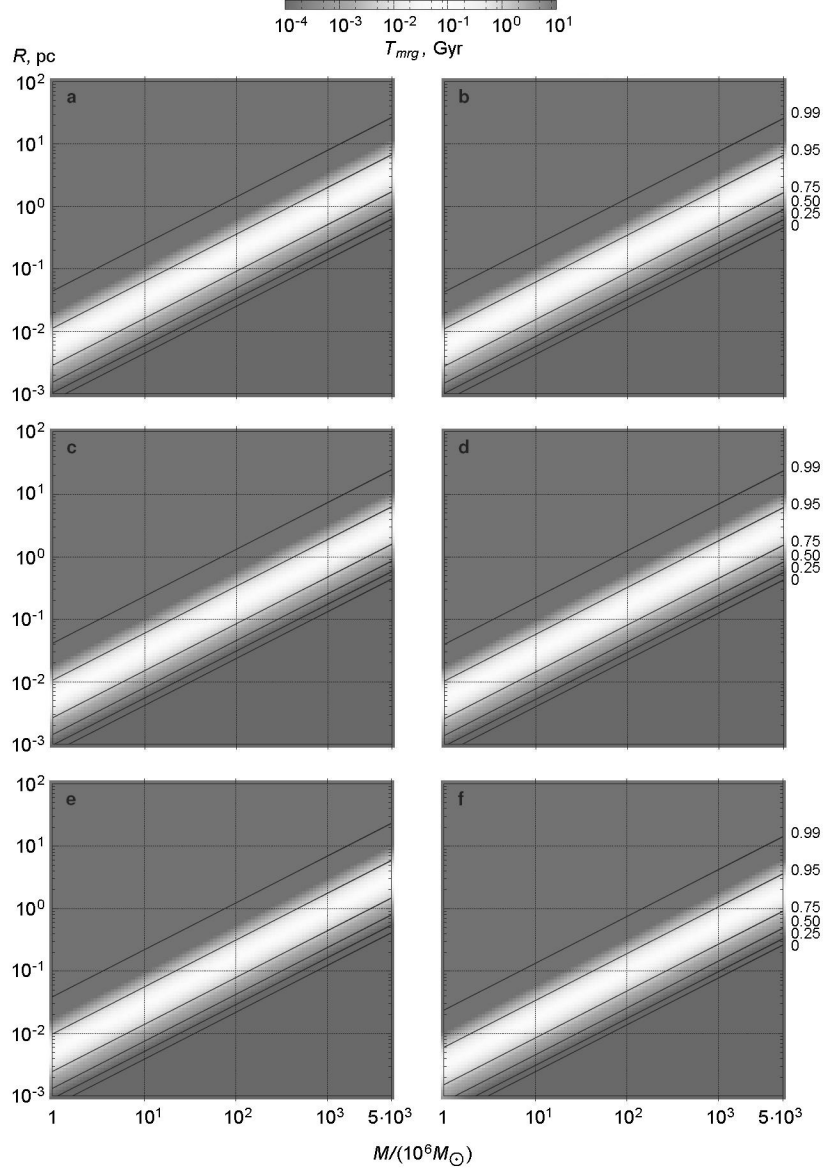


Fig. 4. The color coded final merging time T_{mrg} of SMBHB as a function of total mass and initial separation of the binary. Each separate plot shows the merging time evolution for the specific mass ratio of the binary: $q = 1$ (a), 0.5 (b), 0.333 (c), 0.25 (d), 0.2 (e), 0.02 (f). On each plots we indicate the 1 Gyr merging time line as a function of the initial eccentricity e_0 of the binary. Colored gamma for value $e_0 = 0.95$

For obtaining the GW constraints, for the selected test case ($M_{\text{tot}} = 10^8 M_{\odot}$, $q = 0.5$, $R = 0.01$ pc, $e_0 = 0.95$, $\mathbf{S}_1 = [0, 0, 1]$, $\mathbf{S}_2 = [0, 0, 1]$), we use the spin-spin and spin-orbit coupling which was described above [12]. In Fig. 7 we show the first periastron passes for h_+ and h_{\times} . In Fig. 8 we see the waveform during inspiraling just for h_+ polarization (the h_+ looks similar). In Table 2 we present the GW frequencies for BHs with typical masses and binary system orbital parameters.

Fig. 5. Comparison the simulation's evolution (dots) of the semimajor axis a with analytical results (line) for a system with following initial parameters: $M_{tot} = 2$ [NB], $q = 1$, $R = 1$ [NB], $e_0 = 0.6$, $c = 15$ [NB] with just turning on $2.5\mathcal{PN}$

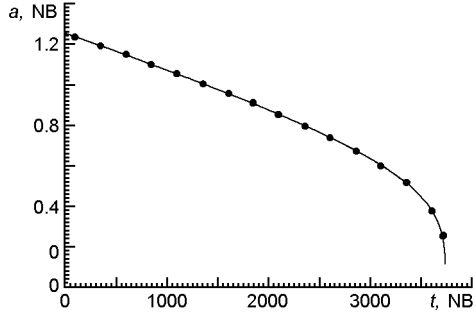


Fig. 6. Comparison the simulation's evolution (dots) of the eccentricity e with analytical results (line) for a system with following initial parameters: $M_{tot} = 2$ [NB], $q = 1$, $R = 1$ [NB], $e_0 = 0.6$, $c = 15$ [NB] with just turning on $2.5\mathcal{PN}$

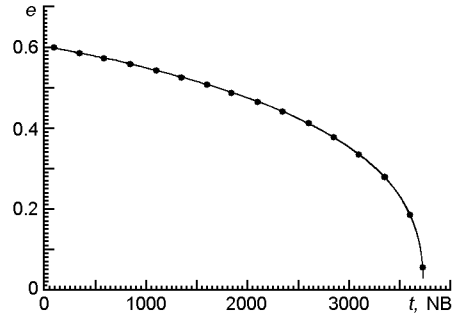


Table 2. The GW frequency for BHs with typical masses M_{tot} and system parameters $q = 0.5$, $e_0 = 0.95$, $R = 0.01$ pc, $S_1 = [0, 0, 1]$, $S_2 = [0, 0, 1]$

M_{tot}/M_\odot	R (r_S)	T_{mrg} , yr	T_{orb} , s	, Hz
10^9	104	0.6	866925	1.15
10^8	1045	631.5	55175	18.1
10^7	10451	655148.3	5933	169

Table 3. Configurations of the systems for SDSS objects from [35] ($q = 1$)

SDSS ID	z	$\log(M_{tot}/M_\odot)$	r_{max} , mpc
J075700.70+424814.5	1.17	9.1311	20
J002444.11+003221.4	0.40	9.5618	102
J004918.98+002609.4	1.94	9.3148	96
J161609.50+434146.8	0.49	8.1696	21
J093502.54+433110.7	0.46	9.3425	181
J032223.02-000803.5	0.62	8.2827	32
J095656.42+535023.2	0.61	8.2944	127

Using our well tested \mathcal{PN} -routine we estimate the possible BHBs merging time for the set of SDSS objects [35]. The main parameters of the binary BHs we present in Table 3. We estimate binary BH expected merging times assuming different eccentricities ($e_0 = 0.00$ — 0.99) of the orbits except J1201, for which we $e_0 = 0.3$. Also we calculated the merging time for the serendipitously discovered SDSS J120136.02 + 3000305.5 ($z = 0.146$) with system parameters $M_{tot} = 1.08 \cdot 10^7 M_\odot$, $q = 0.08$, $r_{max} = 1.3$ mpc, $e_0 = 0.3$ [47].

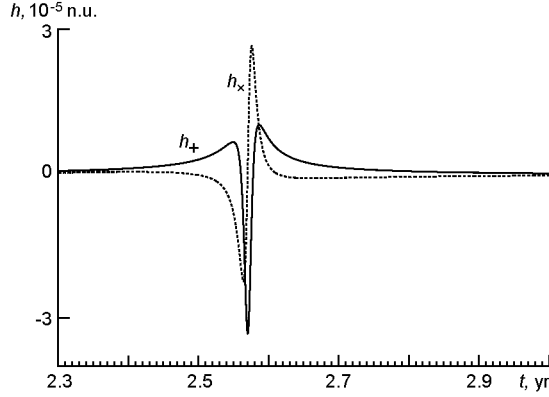


Fig. 7. Simulated strain from a GW during the first periastron for a system with $M_{tot} = 10^8 M_{\odot}$ ($q = 0.5$), $e_0 = 0.95$, $R = 0.01$ pc, $\mathbf{S}_1 = [0, 0, 1]$, $\mathbf{S}_2 = [0, 0, 1]$

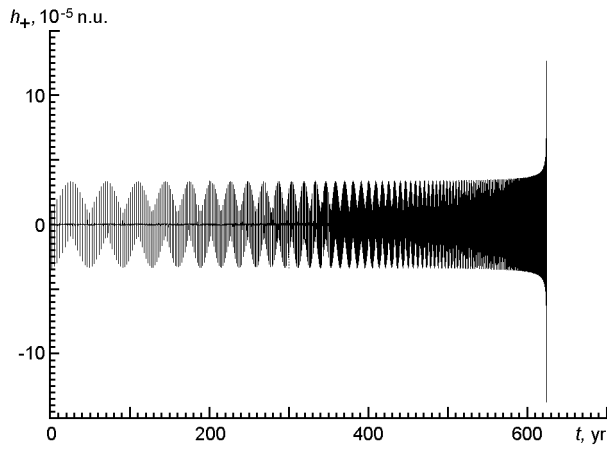


Fig. 8. Strain for a system with parameters $M_{tot} = 10^8 M_{\odot}$ ($q = 0.5$), $e_0 = 0.95$, $R = 0.01$ pc, $\mathbf{S}_1 = [0, 0, 1]$, $\mathbf{S}_2 = [0, 0, 1]$

Table 4. Expected merging time T_{mrg} for SMBHBs for the selected SDSS objects as the function of the eccentricities

e_0	T_{mrg}, yr						
	J0757	J0024	J0049	J1616	J0935	J0322	J0956
0.00	2.139E+04	6.906E+05	2.916E+06	1.767E+07	2.997E+07	4.390E+07	9.929E+09
0.25	6.796E+03	2.213E+05	9.385E+05	5.714E+06	9.672E+06	1.420E+07	3.214E+09
0.50	1.439E+03	4.738E+04	2.023E+05	1.241E+06	2.095E+06	3.086E+06	7.004E+08
0.75	1.221E+02	3.873E+03	1.668E+04	1.040E+05	1.745E+05	2.591E+05	5.920E+07
0.90	9.528E-01	6.635E+00	5.014E+02	4.195E+02	7.413E+02	1.046E+03	2.453E+05
0.99	9.255E-01	6.435E+00	7.780E+00	2.960E+00	1.946E+01	4.893E+00	1.007E+03

As we can see from Table 4 some of the selected SDSS objects have a quite short merging time even for moderately large eccentricities $e_0 = 0.75$. Almost all of the selected objects (except one J0956) have expected merging times only a few years for initial eccentricities $e_0 = 0$. However J1201 has an estimated $T_{mrg} = 3.27$ Myr, that is not such a gratifying result. Hopefully our merging time predictions can be tested with the larger SDSS4 observational catalogues, which are right now in a phase of observation.

CONCLUSION

In our study we analyze the dynamical behavior of SMBHBs. We use a highly accurate direct 2-body code where we apply the additional \mathcal{PN} terms up to $3.5\mathcal{PN}$ for calculation of the gravitational forces which act on the BHs and spin-spin and spin-orbit coupling for calculation of GW constraints. As the main result we obtain the resulting merging time T_{mrg} for a large set of initial mass ratios q of the BBH, initial masses, initial separations and orbital eccentricities e_0 . This data we present as a set of color coded 3-D plots. We also make the original results presented on these plots for different mass ratios q and initial eccentricities e_0 publicly available*. Our \mathcal{PN} treatment was extensively tested and the \mathcal{PN} routines itself we also make publicly available via the same link above. In our high order direct 2-body implementation we use not only the \mathcal{PN} accelerations but also the first derivatives of this accelerations. Our BHBs test calculations show that for BH masses in range $M_{tot} = (10^6 - 10^9)M_\odot$ with a fixed initial separation $R = 0.01$ pc and initial eccentricity $e_0 = 0.95$ the GW frequencies are well inside the LISA sensitivity band (Table 2) [9]. We use our \mathcal{PN} routines to approximate the expected merging time for the selected sample SDSS SMBHBs [35]. Our results show that for significantly large eccentricities the expected merging time for these objects are in the range of years.

ACKNOWLEDGEMENTS

MS acknowledge the financial support by the NASU under the Grant for young researchers. MS and PB acknowledge also the special support by the NASU under the Main Astronomical Observatory GRID/GPU computing cluster *golowood* project.

RS and PB acknowledge support by Chinese Academy of Sciences through the Silk Road Project at NAOC, through the “Qianren” special foreign experts program of China. MS gratefully acknowledges support for collaboration visits in Beijing under the same program.

Supported by the Strategic Priority Research Program “The Emergence of Cosmological Structures” of the Chinese Academy of Sciences, Grant N XDB09000000.

The main part of the simulations presented here was performed on the dedicated GPU clusters *kepler* at the ARI, funded under the grants I/80 041-043 and I/81 396 of the Volkswagen Foundation and the grants 823.219-439/30 and /36 of the Ministry of Science, Research and the Arts of Baden-Württemberg, Germany.

The authors are acknowledges the support of the Volkswagen Foundation under the Trilateral Partnerships grant No. 90411.

Part of the code development work was conducted using the resources of the GPU cluster *laohu* at the Center of Information and Computing at the National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences,

* <ftp://ftp.mao.kiev.ua/pub/sobolenko/>

funded by the Ministry of Finance of People's Republic of China under the grant ZDYZ2008-2.

We also acknowledge the helpful comments made by Stephen Justham.

1. *Amaro-Seoane P., Sesana A., Hoffman L., et al.* Triplets of supermassive black holes: astrophysics, gravitational waves and detection // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2010.—**402**.—P. 2308—2320.
2. *Amaro-Seoane P., Spurzem R.* The loss-cone problem in dense nuclei // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2001.—**327**.—P. 995—1003.
3. *Barton E. J., Geller M. J., Kenyon S. J.* Tidally triggered star formation in close pairs of galaxies // *Astrophys. J.*—2000.—**530**.—P. 660—679.
4. *Begelman M. C., Blandford R. D., Rees M. J.* Massive black hole binaries in active galactic nuclei // *Nature*.—1980.—**287**.—P. 307—309.
5. *Bell E. F., Naab T., McIntosh D. H., et al.* Dry mergers in GEMS: The dynamical evolution of massive early-type galaxies // *Astrophys. J.*—2006.—**640**.—P. 241—251.
6. *Berczik P., Merritt D., Spurzem R., et al.* Efficient merger of binary supermassive black holes in nonaxisymmetric galaxies // *Astrophys. J.*—2006.—**642**.—P. 21—24.
7. *Berczik P., Nitadori K., Zhong S., et al.* High performance massively parallel direct N-body simulations on large GPU clusters // *Inter. conf. "High Performance Computing"*, Kyiv, Ukraine, October 8—10, 2011. — Kyiv, 2011.—P. 8—18.
8. *Berczik P., Spurzem R., Wang L.* Up to 700k GPU cores, Kepler, and the Exascale future for simulations of star clusters around black holes // *Third International Conference "High Performance Computing" (HPC-UA 2013)*, Kyiv, Ukraine, October 7—17, 2013. — Kyiv, 2013.—P. 52—59.
9. *Berentzen I., Preto M., Berczik P., et al.* Binary black hole merger in galactic nuclei: Post-Newtonian simulations // *Astrophys. J.*—2009.—**695**.—P. 455—468.
10. *Blanchet L.* Gravitational radiation from post-Newtonian sources and inspiralling compact binaries // *Liv. Revs Relativ.*—2006.—**9**.—114 p.
11. *Blanchet L., Faye G., Ponsot B.* Gravitational field and equations of motion of compact binaries to $5/2$ post-Newtonian order // *Phys. Rev. D.*—1998.—**58**, N 12.—20 p.
12. *Brem P.* Effects of general relativity in direct N-body codes: Master's thesis. — Heidelberg: Astronomisches Rechen-Institut, 2011.—85 p.
13. *Brem P., Amaro-Seoane P., Spurzem R.* Relativistic mergers of compact binaries in clusters: the fingerprint of the spin // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2013.—**434**.—P. 2999—3007.
14. *Bridge C. R., Appleton P. N., Conselice C. J., et al.* The role of galaxy interactions and mergers in star formation at $z = 1.3$: Mid-infrared properties in the Spitzer first look survey // *Astrophys. J.*—2007.—**659**.—P. 931—940.
15. *Choi E., Naab T., Ostriker J. P., et al.* Consequences of mechanical and radiative feedback from black holes in disc galaxy mergers // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2014.—**42**.—P. 440—453.
16. *Cutler C.* Angular resolution of the LISA gravitational wave detector // *Phys. Rev. D.*—1998.—**57**.—P. 7089—7102.
17. *Damour T.* Gravitational radiation and the motion of compact bodies // *Lecture Notes in Physics*. — Berlin: Springer Verlag, 1983.—P. 59—144.
18. *Damour T., Deruelle N.* Generalized lagrangian of two point masses in the post-Newtonian approximation of general-relativity // *Comptes rendus de l'Academie des Sci. Ser. II.*—1981.—**293**.—P. 537—540.
19. *Damour T., Deruelle N.* Radiation reaction and angular momentum loss in small angle gravitational scattering // *Phys. Lett. A.*—1981.—**87**.—P.81—84.
20. *Damour T., Deruelle N.* The two-body problem and radiation damping in general-relativity // *Comptes rendus de l'Academie des Sci. Ser. II.*—1982.—**294**.—P. 1355—

1357.

21. *Damour T., Jaranowski P., Schäfer G.* Equivalence between the ADM Hamiltonian and the harmonic-coordinates approaches to the third post-Newtonian dynamics of compact binaries // *Phys. Rev. D.*—2001.—**63** (4).—11 p.
22. *Damour T., Schäfer G.* Lagrangians for n point masses at the second post-Newtonian approximation of general relativity // *Gen. Relativity and Gravitation.*—1985.—**17**.—P. 879—905.
23. *de Andrade V. C., Blanchet L., Faye G.* Third post-Newtonian dynamics of compact binaries: Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms // *Classical and Quantum Gravity.*—2001.—**18**.—P. 753—778.
24. *Deruelle N.* Sur les équations du mouvement et le rayonnement gravitationnel d'un système binaire en Relativité Générale: PhD thesis. — Paris: Université Pierre et Marie Curie, 1982.
25. *Di Matteo P., Bournaud F., Martig M., et al.* On the frequency, intensity, and duration of starburst episodes triggered by galaxy interactions and mergers // *Astron. and Astrophys.*—2008.—**492**.—P. 31—49.
26. *Faye G., Blanchet L., Buonanno A.* Higher-order spin effects in the dynamics of compact binaries. I. Equations of motion // *Phys. Rev. D.*—2006.—**74**, N 10.—19 p.
27. *Frank J. Rees M. J.* Effects of massive central black holes on dense stellar systems // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—1976.—**176**.—P. 633—647.
28. *Governato F., Brook C., Mayer L., et al.* Bulgeless dwarf galaxies and dark matter cores from supernova-driven outflows // *Nature.*—2010.—**463**.—P. 203—206.
29. *Gualandris A., Merritt D.* Long-term evolution of massive black hole binaries. IV. Mergers of galaxies with collisionally relaxed nuclei // *Astrophys. J.*—2012.—**744**, N 1.—21 p.
30. *Gültekin K., Richstone D. O., Gebhardt K., et al.* The M-sigma and M-L relations in galactic bulges, and determinations of their intrinsic scatter // *Astrophys. J.*—2009.—**698**.—P. 198—221.
31. *Haehnelt M. G., Kauffmann G.* Multiple supermassive black holes in galactic bulges // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2002.—**336**.—P. 61—64.
32. *Henon M. H.* The Monte Carlo method // *Astrophys. and Space Sci.*—1971.—**14**, N 1.—P. 151—167.
33. *Hewitson M., Consortium eLISA.* eLISA: A mission to study the entire universe with gravitational waves // *Amer. Astron. Soc. Meeting Abstracts.*—2014.—**223**.—P. 248.
34. *Hirschmann M., Somerville R. S., Naab T., et al.* Origin of the antihierarchical growth of black holes // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2012.—**426**.—P. 237—257.
35. *Ju W., Greene J. E., Rafikov R. R., et al.* Search for supermassive black hole binaries in the Sloan Digital Sky Survey spectroscopic sample // *Astrophys. J.*—2013.—**777**.—16 p.
36. *Kauffmann G., Haehnelt M.* A unified model for the evolution of galaxies and quasars // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2000.—**311**.—P. 576—588.
37. *Khan F. M., Berentzen I., Berczik P., et al.* Formation and hardening of supermassive black hole binaries in minor mergers of disk galaxies // *Astrophys. J.*—2012.—**756**.—10 p.
38. *Khan F. M., Holley-Bockelmann K., Berczik P., et al.* Supermassive black hole binary evolution in axisymmetric galaxies: The final parsec problem is not a problem // *Astrophys. J.*—2013.—**773**.—6 p.
39. *Khan F. M., Just A., Merritt D.* Efficient merger of binary supermassive black holes in merging galaxies // *Astrophys. J.*—2011.—**732**.—8 p.
40. *Khan F. M., Preto M., Berczik P., et al.* Mergers of unequal-mass galaxies: super-

- massive black hole binary evolution and structure of merger remnants // *Astrophys. J.*—2012.—**749**.—14 p.
41. *Kidder L. E.* Coalescing binary systems of compact objects to (post)^{5/2}-Newtonian order. V. Spin effects // *Phys. Rev. D.*—1995.—**52**.—P. 821—847.
 42. *Komossa S.* Observational evidence for supermassive black hole binaries // *AIP Conf. Proc.*—2003.—**686**.—P. 161—174.—(The astrophysics of gravitational wave sources / Ed. J. M. Centrella).
 43. *Kupi G., Amaro-Seoane P., Spurzem R.* Dynamics of compact object clusters: a post-Newtonian study // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2006.—**371**.—P. 45—49.
 44. *Lin L., Cooper M. C., Jian H.-Y., et al.* Where do wet, dry, and mixed galaxy mergers occur? A study of the environments of close galaxy pairs in the DEEP2 galaxy redshift survey // *Astrophys. J.*—2010.—**718**.—P. 1158—1170.
 45. *Lin L., Koo D. C., Weiner B. J., et al.* AEGIS: Enhancement of dust-enshrouded star formation in close galaxy pairs and merging galaxies up to $z \sim 1$ // *Astrophys. J.*—2007.—**660**.—P. 51—54.
 46. *Lin L., Patton D. R., Koo D. C., et al.* The redshift evolution of wet, dry, and mixed galaxy mergers from close galaxy pairs in the DEEP2 galaxy redshift survey // *Astrophys. J.*—2008.—**681**.—P. 232—243.
 47. *Liu F. K., Li S., Komossa S.* A milliparsec supermassive black hole binary candidate in the galaxy SDSS J120136.02 + 300305.5 // *Astrophys. J.*—2014.—**786**.—14 p.
 48. *Mayer L., Kazantzidis S., Escala A., et al.* Direct formation of supermassive black holes via multi-scale gas inflows in galaxy mergers // *Nature*.—2010.—**466**.—P. 1082—1084.
 49. *Merritt D.* Brownian motion of a massive binary // *Astrophys. J.*—2001.—**556**.—P. 245—264.
 50. *Merritt D., Milosavljevic M.* Massive black hole binary evolution // *Liv. Revs Relativity*.—2005.—**8**.—63 p.
 51. *Milosavljevic M., Merritt D.* Formation of galactic nuclei // *Astrophys. J.*—2001.—**563**.—P. 34—62.
 52. *Milosavljevic M., Merritt D.* The final parsec problem // *AIP Conf. Proc.*—2003.—**686**.—P. 201—210.—(The astrophysics of gravitational wave sources / Ed. J. M. Centrella).
 53. *Nitadori K., Makino J.* Sixth- and eighth-order Hermite integrator for N-body simulations // *New Astronomy*.—2008.—**13**.—P. 498—507.
 54. *Ohta T., Okamura H., Kimura T., et al.* Physically acceptable solution of Einstein's equation for many-body system // *Progr. Theor. Phys.*—1973.—**50**.—P. 492—514.
 55. *Ohta T., Okamura H., Kimura T., et al.* Coordinate condition and higher order gravitational potential in canonical formalism // *Progr. Theor. Phys.*—1974.—**51**.—P. 1598—1612.
 56. *Ohta T., Okamura H., Kimura T., et al.* Higher order gravitational potential for many-body system // *Progr. Theor. Phys.*—1974.—**51**.—P. 1220—1238.
 57. *Overzier R. A., Heckman T. M., Kauffmann G., et al.* Hubble space telescope morphologies of local Lyman break galaxy analogs. I. Evidence for starbursts triggered by merging // *Astrophys. J.*—2008.—**677**.—P. 37—62.
 58. *Peters P. C.* Gravitational radiation and the motion of two point masses // *Phys. Rev.*—1964.—**136**.—P. 1224—1232.
 59. *Peters P. C., Mathews J.* Gravitational radiation from point masses in a Keplerian orbit // *Phys. Rev.*—1963.—**131**.—P. 435—440.
 60. *Preto M., Berentzen I., Berczik P., et al.* Fast coalescence of massive black hole binaries from mergers of galactic nuclei: Implications for lowfrequency gravitational-wave astrophysics // *Astrophys. J.*—2011.—**732**.—6 p.
 61. *Rodriguez Zaurin J., Tadhunter C. N., Gonzalez Delgado R. M.* The properties of the

- stellar populations in ULIRGs. II. Star formation histories and evolution // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2010.—**403**.—P. 1317—1330.
62. *Sathyaprakash B. S., Schutz B. F.* Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves // *Liv. Revs Relativity*.—2009.—**12**.—141 p.
63. *Sijacki D., Vogelsberger M., Genel S., et al.* The Illustris simulation: the evolving population of black holes across cosmic time // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2015.—**452**.—P. 575—596.
64. *Silk J., Rees M. J.* Quasars and galaxy formation // *Astron. and Astrophys.*—1998.—**331**.—P. 1—4.
65. *Soffel M. H.* Relativity in astrometry, celestial mechanics and geodesy. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1989.—208 p.
66. *Tagoshi H., Ohashi A., Owen B. J.* Gravitational field and equations of motion of spinning compact binaries to 2.5 post-Newtonian order // *Phys. Rev. D*.—2001.—**63**, N 4.—14 p.
67. *van Dokkum P. G.* The recent and continuing assembly of field elliptical galaxies by red mergers // *Astrophys. J.*—2005.—**130**.—P. 2647—2665.
68. *Wang L., Berczik P., Spurzem R., et al.* The link between ejected stars, hardening and eccentricity growth of super massive black holes in galactic nuclei // *Astrophys. J.*—2014.—**780**.—14 p.
69. *Yagi K., Seto N.* Detector configuration of DECIGO/BBO and identification of cosmological neutron-star binaries // *Phys. Rev. D*.—2011.—**83**, N 4.—14 p.
70. *Zhong S., Berczik P., Spurzem R.* Super massive black hole in galactic nuclei with tidal disruption of stars // *Astrophys. J.*—2014.—**792**.—17 p.
71. *Zinchenko I. A., Berczik P., Grebel E. K., et al.* On the influence of minor mergers on the radial abundance gradient in disks of milky-way-like galaxies // *Astrophys. J.*—2015.—**806**.—17 p.

Received 01.04.16

УДК 533.951

С. О. Черемных, И. Т. Жук

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины
Проспект Академика Глушкова 40, корп. 4/1, Киев 187, ГСП 03680
ikdcheremnykh@gmail.com, zhukigor@gmail.com

Дискретные УНЧ-моды в магнитосфере Земли вблизи минимума альвеновской частоты

Получено уравнение малых колебаний для УНЧ-волн в магнитосфере Земли с учетом быстрой магнитозвуковой волны. С помощью этого уравнения исследован спектр дискретных альвеновских мод вблизи минимума альвеновской частоты.

ДИСКРЕТНІ УНЧ-МОДИ В МАГНІТОСФЕРІ ЗЕМЛІ ПОБЛИЗУ МІНІМУМУ АЛЬВЕНІВСЬКОЇ ЧАСТОТИ, Черемних С. О., Жук І. Т. — Отримано рівняння малих коливань для УНЧ-хвиль в магнітосфері Землі з урахуванням швидкої магнітозвучової хвилі. За допомогою цього рівняння досліджено спектр дискретних альвенівських мод поблизу мінімуму альвенівської частоти.

DISCRETE ULF MODES IN THE EARTH'S MAGNETOSPHERE NEAR THE ALFVEN FREQUENCY MINIMUM, by Cheremnykh S. O., Zhuk I. T. — The equation of small oscillations of ULF waves in the magnetosphere of the Earth was received taking into account the fast magnetosonic waves. The spectrum of discrete Alfvén modes near the minimum Alfvén frequency was investigated with the help of this equation.

ВВЕДЕНИЕ

Ультранизкочастотные (УНЧ) волны в магнитосфере Земли регулярно фиксируются с помощью наземных магнитометров, радаров и спутников [14, 15]. Важность этих волн для физики магнитосферы определяется их способностью ускорять заряженные частицы до релятивистских энергий, служить триггерами магнитосферных суббурь и

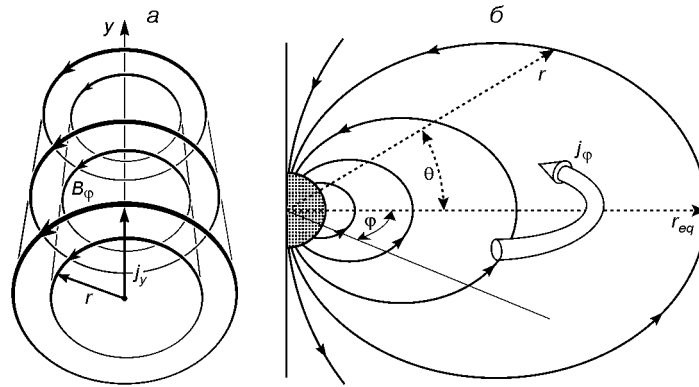


Рис. 1. Модели магнитосферы Земли: *a* — одномерно-неоднородный плазменный цилиндр с продольным током [11], *б* — дипольное магнитное поле с тороидальным током [18]

средством для диагностики магнитосферы. Долгопериодические УНЧ-волны (диапазоны Pc 4 — Pc 5) в настоящее время обычно делят на два типа [3]. К первому типу относят волны с малыми азимутальными волновыми числами ($m \sim 1$). Волны второго типа имеют большие азимутальные волновые числа ($m \gg 1$).

В недавних работах [11, 12] УНЧ-волны с большими азимутальными волновыми числами исследовались в рамках одномерно-неоднородной цилиндрической модели магнитосферы (см. рис. 1, *a*). В этой модели силовые линии магнитного поля рассматривались как концентрические окружности с радиусом r в цилиндрических координатах r, θ, z . Считалось, что все равновесные параметры (давление, плотность, магнитное поле и т. д.) изменяются поперек магнитных поверхностей $r = \text{const}$. Эта модель существенно упростила дифференциальные уравнения малых колебаний для азимутально-мелкомасштабных возмущений и позволила провести довольно полное исследование их поперечной (к магнитному полю) структуры в локальном приближении. Вместе с тем за рамками работ [11, 12] остался вопрос об условиях применимости цилиндрической модели магнитосферы. Частично ответ на этот вопрос будет получен в настоящей работе.

Известно, что для описания УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли наиболее подходящей является модель дипольного магнитного поля (см. рис. 1, *б*), которая последовательно учитывает кривизну силовых линий магнитного поля, радиальную неоднородность среды, распределение тороидального тока и давления [4, 18]. В этой работе мы покажем, что модель дипольного магнитного поля и модель одномерно-неоднородного цилиндрического шнура, использованная в работах [11, 12], приводят к одним и тем же уравнениям для поперечной структуры азимутально-мелкомасштабных УНЧ-возмущений. Тем самым мы обоснуем применимость модели цилиндрического шнура для описания УНЧ-возмущений в магнитосфере. Кроме того, полученные нами уравнения будут записаны в декартовой системе координат x, y, z , что существенно упрощает их анализ и сравнение с

другими результатами. С помощью этих уравнений мы воспроизведем ряд известных результатов, а также получим условие реализации дискретных резонансных мод вблизи минимума альвеновской частоты. Этот результат дополняет результат работы [12], согласно которому дискретные моды реализуются вблизи максимума альвеновской частоты.

УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДИПОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В качестве исходных берем линеаризованные МГД-уравнения в дипольном магнитном поле, которые использовались в работах [13, 23] для описания ультранизкочастотных МГД-мод в магнитосфере Земли:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \frac{1}{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - 2(p_1 - p - p \operatorname{div} \vec{r}) \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{p_1}{s} \vec{r}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \frac{1}{s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{p_1}{s} \vec{r} = 0, \quad (2)$$

$$p \vec{B} - (\operatorname{div} \vec{r}) = 0, \quad (3)$$

$$p_1 - p \operatorname{div} \vec{r} = B^2 (\operatorname{div} \vec{r} - 2 \vec{r} \cdot \nabla). \quad (4)$$

Система (1) — (4) описывает «зацепленные» через кривизну силовых линий магнитного поля альвеновские магнитозвуковые моды. Здесь использованы следующие обозначения: ω — частота возмущений, \vec{B} — равновесное магнитное поле, p и ρ — равновесные давление и плотность плазмы, \vec{r} — вектор смещения элементарного объема плазмы, $\frac{1}{s} = B^2 / |\nabla r|^2$, \vec{r} — вектор кривизны силовых линий магнитного поля, $p = dp/d$, нижним индексом s обозначена величина, перпендикулярная к магнитному полю, γ — показатель адиабаты, p_1 — возмущенное полное давление плазмы. При записи (1)–(4) использовано масштабирование магнитного поля в виде $\vec{B} / \sqrt{4\pi} = \vec{B}$. Вектор \vec{r} может быть представлен в виде (см. Приложение 1)

$$\vec{r} = \frac{\psi}{r^2} \vec{e}_\psi + \frac{r}{\sin \theta} \vec{e}_\theta, \quad (5)$$

где ψ — полоидальный магнитный поток, θ — тороидальный угол. Эти величины определяют дипольное магнитное поле [8]

$$\vec{B} = \left[\frac{2\psi}{r^3} \vec{e}_\psi - \frac{r}{\sin^3 \theta} \vec{e}_\theta \right]. \quad (6)$$

Из выражения (6) видно, что величины \vec{p}_1 , \vec{p}_2 и \vec{B} являются взаимно ортогональными на любой магнитной поверхности, вследствие чего по этим направлениям можно разложить любую физическую величину, например вектор смещения \vec{u} . Это обстоятельство наводит на мысль использовать направления \vec{p}_1 , \vec{p}_2 и \vec{B} в качестве направлений локальной системы координат на произвольно выбранной магнитной поверхности.

Для дальнейшего анализа удобно преобразовать уравнение (3). Выразим в (4) $\text{div} \vec{u}$ через p_1 , и :

$$\text{div} \vec{u} = \frac{B^2}{p} \frac{\vec{B}}{B^2} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{p_1}{|\vec{B}|^2} \nabla \vec{u}$$

и подставим результат в (3), в итоге получаем

$$\Delta \vec{u} - c_T^2 \nabla \frac{\vec{B}}{B^2} \cdot \nabla \vec{u} = \frac{c_s^2}{c_A^2} p_1 \vec{u}, \quad (7)$$

где c_A — альвеновская скорость, c_s — скорость звука, c_T — касповая скорость:

$$c_A^2 = \frac{B^2}{p}, \quad c_s^2 = \frac{p}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{c_s^2 c_A^2}{c_s^2 + c_A^2}.$$

Уравнения (1), (2), (4) и (7) являются исходными и будут использоваться ниже. Поскольку они имеют довольно громоздкий вид, а их коэффициенты являются переменными [21, 22], то обычно они решаются численно [7] и требуют существенного упрощения даже для получения таких решений.

УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЛОКАЛЬНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Следуя [5], запишем (1), (2), (4) и (7) в локальном приближении. С этой целью ведем единичные ортогональные орты (см. уравнение (6))

$$\vec{e}_x = \frac{\vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}, \quad \vec{e}_y = \frac{\vec{p}_2}{|\vec{p}_2|}, \quad \vec{e}_z = \frac{\vec{B}}{B} \quad (8)$$

и запишем вектор смещения \vec{u} в виде

$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z. \quad (9)$$

Сравнивая (5) и (8), получаем

$$u_x = \frac{\vec{u} \cdot \vec{p}_1}{|\vec{p}_1|}, \quad u_y = \frac{\vec{u} \cdot \vec{p}_2}{|\vec{p}_2|}, \quad u_z = \frac{\vec{u} \cdot \vec{B}}{B}. \quad (10)$$

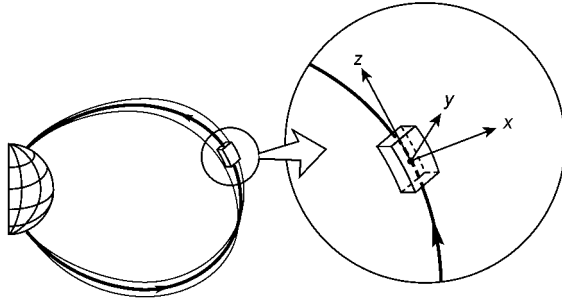


Рис. 2. Локальное приближение в дипольном магнитном поле, x, y, z — локальные координаты)

Из (8) находим выражения для дифференциальных операторов в координатах x, y, z :

$$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\vec{B}}{B} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (11)$$

В отличие от работ [17, 27, 29] мы хотим уделить основное внимание поперечной структуре УНЧ-возмущений, а не продольной. С этой целью рассмотрим элементарный объем магнитосферной плазмы (рис. 2), который будем считать однородным по направлениям y и z , а по x — неоднородным, и для него упростим исходные уравнения. При таком подходе мы фактически пренебрегли граничными условиями на ионосфере (детали см. в работах [20, 26]), предполагая, что они мало влияют на искомое решение. Внутри рассматриваемого объема отдельную фурье-гармонику произвольной возмущенной величины X можно представить в виде

$$X(x, y, z, t) = X(x) \exp(i t - i k_y y - i k_z z). \quad (12)$$

С учетом (9)—(12) уравнения (1), (2), (4) и (7) в локальной системе координат x, y, z принимают вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - c_A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p_1 + 2 p_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c_A^2}{x} \right) + 2 c_A^2 k_y^2 p_1 = - \frac{p_1}{x}, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - c_A^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) p_1 = i k_y p_1, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - c_T^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) p_1 = i k_z \frac{c_T^2}{c_A^2} p_1 - 2 c_T^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_1, \quad (15)$$

$$p_1 = \left(c_s^2 - c_A^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} p_1 + i \left(c_s^2 - c_A^2 \right) k_y p_1 + i c_s^2 k_z p_1 - 2 c_A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_1, \quad (16)$$

где $\frac{\partial}{\partial x}$ — проекция вектора кривизны силовой линии магнитного поля на x -направление, перпендикулярное к магнитным поверхностям, p_1 — масштаб изменения давления плазмы в направлении x , которое соответствует радиальному направлению от Земли в реальной магнитосфере, $c_A(x) = k_z c_A(x)$, $c_s = k_z c_s(x)$, $c_T(x) = k_z c_T(x)$.

Уравнения (13)—(16) справедливы для плазменных объемов с достаточно большим давлением плазмы, например для радиационных поясов Земли.

РЕЗОНАНСНЫЕ МОДЫ

Выразим в (14) и (15) амплитуды возмущений y и z через p_1 и x :

$$ik_y y = \frac{k_y^2 p_1}{(\omega^2 - \omega_A^2)},$$

$$ik_z z = \frac{k_z^2 \frac{c_s^2}{c_s^2 - c_A^2} p_1 - 2 \frac{c_s^2 c_A^2}{c_s^2 - c_A^2} x}{(\omega^2 - \omega_T^2)}$$

и подставим эти выражения в (16). После некоторых алгебраических преобразований находим

$$p_1 = \frac{(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_y^2 m^2(x)} \frac{x}{x} = \frac{2 x x (\omega^2 - \omega_s^2)}{1 (\omega^2 - \omega_T^2)}, \quad (17)$$

где введено обозначение

$$m^2 = \frac{(\omega_s^2 - \omega_A^2)(\omega_A^2 - \omega_T^2)}{(c_s^2 - c_A^2)(\omega_T^2 - \omega^2)}, \quad \frac{c_s^2}{c_A^2}, \quad (18)$$

которое ранее использовалось для описания МГД-возмущений в солнечных магнитных трубках [10, 24, 25]. Подставляя (17) и выражение для y в (13), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для x :

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(\omega^2 - \omega_A^2)}{k_y^2 m^2} \frac{dx}{dx} \right] - 2 x \frac{d}{dx} x c_A^2 \frac{m^2}{k_y^2 m^2} - (\omega^2 - \omega_A^2) x - 2 p_p x x - 4 \frac{c_A^2}{x} \frac{m^2}{c_A^2} \frac{2 k_y^2 c_s^2}{(c_s^2 - c_A^2)(\omega^2 - \omega_T^2)} = 0. \quad (19)$$

С точностью до обозначений уравнение (19) совпадает с уравнением (19) работы [11]. Это обстоятельство говорит о том, что модель радиально-неоднородного плазменного цилиндра и модель дипольного магнитного поля одинаково описывают УНЧ-волны в магнитосферной плазме.

Покажем, что из уравнения (19) следует ряд известных результатов. Из структуры уравнения (19) следует, что при конечных k_y и k_z оно имеет сингулярности при $\omega^2 = \omega_A^2$ и $\omega^2 = \omega_T^2$ [2, 8]. Появление син-

гулярностей приводит к двум ветвям колебаний с непрерывными спектрами:

$$\begin{aligned} \min[\omega_A^2(x)] &\leq \omega^2 \leq \max[\omega_A^2(x)], \\ \min[\omega_T^2(x)] &\leq \omega^2 \leq \max[\omega_T^2(x)]. \end{aligned}$$

Точки x_A и x_T , в которых справедливы соотношения $\omega^2 = \omega_A^2(x_A)$ или $\omega^2 = \omega_T^2(x_T)$, отвечают положениям сингулярных магнитных поверхностей. На этих поверхностях, которые непрерывно заполняют пространство в направлении x , образуя континуум, МГД-волны аномально поглощаются, и по этой причине они устойчивы. Первое неравенство определяет альвеновский континуум, а второе — касповый.

Числитель в первом слагаемом уравнения (19) определяет резонансные точки, а знаменатель — точки отсечки $\omega = \omega_A(x)$ и $\omega = \omega_T(x)$. В этих точках, как обычно, волна становится нераспространяющейся [2]. При распространении УНЧ-волны с заданной частотой в неоднородной магнитосферной плазме значения частот ω_A , ω_T и изменяются, в результате изменяется и вид волны. В случае азимутально-мелкомасштабных УНЧ-возмущений этот вопрос был частично исследован в работе [11].

Если в (19) пренебречь кривизной силовых линий, то оно существенно упростится к виду, часто используемому в работах по солнечной магнитной гидродинамике [8]:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\omega(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x))}{k_y^2 m^2(x)} \right) \frac{d}{dx} \omega(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) = 0. \quad (20)$$

Для «холодной плазмы» ($p = 0$) из (18) находим

$$m^2 = K^2 - k_z^2, \quad K^2 = \frac{\omega^2}{c_A^2(x)}.$$

В этом случае уравнение (20) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{B^2 (K^2 - k_z^2)}{(K^2 - k_y^2 - k_z^2)} \right) \frac{d}{dx} \omega(x) (\omega^2 - \omega_A^2(x)) = 0. \quad (21)$$

Как было показано в работе [6], уравнение (21) имеет резонансное решение, локализованное вблизи точки x_0 , в которой $K^2(x_0) = k_z^2$. Такое решение реализуется только при условии $k_y \neq 0$, поскольку при $k_y = 0$ в уравнении (21) исчезает резонанс.

Предположим, что плазменная среда является однородной в направлении x , тогда из (20) получаем хорошо известное дисперсионное уравнение для МГД-волн:

$$(\omega^2 - \omega_A^2) [\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_s^2 - c_A^2) - k^2 k_z^2 c_s^2 c_A^2] = 0,$$

где $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$. Первая скобка в этом уравнении описывает альвеновские волны, а вторая — быструю и медленную магнитозвуковые волны. В работе [9] было показано, что если в уравнениях (1)–(4)

положить $p_1 = 0$, то указанные уравнения описывают альвеновские моды и медленную магнитозвуковую волну. Быстрая магнитозвуковая волна в этом случае отсутствует, что является характерным для замкнутых плазменных систем.

Таким образом, при $p_1 = 0$ реализуются только собственные магнитосферные моды.

Из приведенного анализа следует, что в случае внешнего воздействия на магнитосферную систему [14, 15], когда $p_1 \neq 0$, в ней может реализоваться быстрая магнитозвуковая волна. Последняя может реализоваться только в открытых плазменных системах, которой является магнитосфера.

Таким образом, уравнение (19) описывает магнитосферные МГД-волны, генерируемые внешними воздействиями.

Отметим, что в общем случае решения уравнений (19) и (20) не являются очевидными. К настоящему времени проанализировано лишь несколько частных случаев [10]. Известно, что уравнения (19) и (20) содержат как непрерывные, так и дискретные решения. При соответствующих граничных условиях эти уравнения обычно исследуют численно. Ниже мы сосредоточим свое внимание на случае, для которого можно получить аналитические результаты и который имеет непосредственное отношение к исследованию УНЧ-возмущений с помощью космических аппаратов.

МОДЫ С ДИСКРЕТНЫМ СПЕКТРОМ ВБЛИЗИ $\omega_{A \min}$

Поскольку альвеновская частота ω_A имеет в магнитосфере Земли характерные минимум и максимум на расстоянии 3-4 радиусов [28], то естественно рассмотреть дискретные моды, лежащие в окрестности минимума (рис. 3). Мотивацией такого рассмотрения является хорошо известный результат [30] о существовании у уравнений вида (19) решений в виде дискретных альвеновских мод с частотами ω_n (n — радиальное квантовое число), лежащих ниже минимума альвеновского непрерывного спектра, т. е. $\omega_n < (\omega_{A \min})^2$.

Положим, что в точке x_0 альвеновская частота ω_A принимает минимальное значение, т. е.

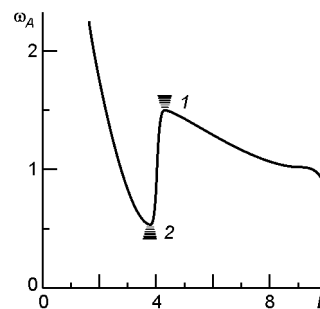


Рис. 3. Зависимость альвеновской частоты от расстояния в экваториальной плоскости ($L = r/r_E$, r_E — радиус Земли) [28]: 1 — дискретные УНЧ-моды, обнаруженные в работе [12], 2 — дискретные УНЧ-моды, исследованные в данной работе

$$A|_{x_0} = 0, \quad A|_{x_0} = 0.$$

Разложив уравнение (19) вблизи точки x_0 после простых, но достаточно громоздких преобразований, получаем уравнение

$$\frac{d}{dy} (1 - y^2) \frac{d_r}{dy} - l^2 (1 - y^2) - G_r = 0. \quad (22)$$

При получении (22) предполагалась радиальная мелкомасштабность возмущений. Здесь использованы обозначения

$$y = \frac{x - x_0}{l}, \quad l^2 = 1 - \frac{2}{A(x_0)},$$

$$l^2 = \left. \frac{2}{A} \right|_{x_0}, \quad k_y^2 = k_y^2, \quad G = \frac{k_y^2 l^2}{k_z^2} (k_x^2 - k_x^2). \quad (23)$$

Выражение для l^2 введено с учетом предположения $k_x^2 < A(x_0)$. Поскольку для рассматриваемых мод справедливо условие $k_y^2 l^2 \gg 1$, то величина l^2 будет достаточно большой величиной при $k_x^2 < A(x_0)$ и будет обращаться в ноль на границе альвеновского континуума ($k_x^2 = A(x_0)$).

Нетрудно убедиться [19], что замена переменных $y = \text{sh}z$, $d_r = (\text{ch}z)^{1/2} (z)$ позволяет представить (22) в виде уравнения Шредингера:

$$\frac{d^2}{dz^2} (E - U(z)) = 0 \quad (24)$$

с потенциалом

$$U(z) = l^2 \text{ch}^2 z - (2\text{ch}z)^2 \quad (25)$$

и энергией

$$E = G - 1/4. \quad (26)$$

В результате задача о нахождении дискретных мод свелась к отысканию энергетических уровней в потенциальной яме (25) с граничными условиями для функции вида $|_z = 0$.

В потенциальной яме (25) есть только положительные дискретные уровни энергии, поскольку она существует только при $l^2 > 0$ и удовлетворяет неравенству $U(z) > 0$. Следовательно, необходимое условие существования энергетических уровней в потенциале (25) имеет вид

$$G - 1/4 = 0. \quad (27)$$

Неравенство (27) в физических переменных имеет вид

$$k_x^2 - k_x^2 = \frac{1}{4} \frac{k_z^2}{k_y^2 l^2} \quad (28)$$

и реализуется только в криволинейном магнитном поле и в плазме с достаточно большим давлением.

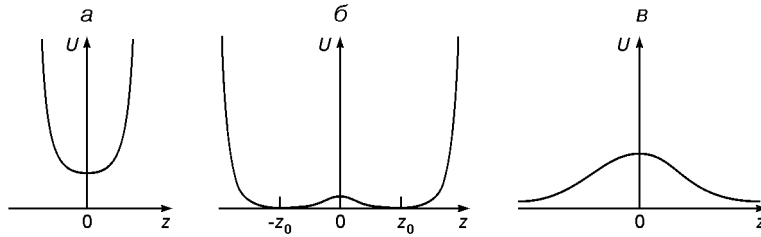


Рис. 4. Вид потенциала (25) в зависимости от значения γ : а — $\gamma = 1/2$, б — $0 < \gamma < 1/2$, в — $\gamma = 0$

Неравенство (27) является довольно грубым, поскольку оно не учитывает форму потенциальной ямы. В зависимости от значений величины γ потенциальная яма (25) может принимать два качественно различных вида (см. рис. 4):

- при $\gamma = 1/2$ потенциал $U(z)$ имеет единственный минимум $U(0) = \gamma^2 + 1/4$ в точке $z = 0$ и монотонно увеличивается с увеличением $|z|$ (рис. 4, а);
- при $0 < \gamma < 1/2$ потенциал $U(z)$ имеет локальный максимум $U(0) = \gamma^2 + 1/4$ в точке $z = 0$ и два симметричных минимума $U(\pm z_0) = \gamma^2 - 1/4$ в точках $z_0 = \text{Arcch}[(2 - \gamma^2)^{1/2}]$ (рис. 4, б).

В областях $|z| > z_0$ потенциал $U(z)$ монотонно увеличивается с увеличением $|z|$.

Тогда из очевидного условия $E > U_{\min}$ получаем оценку для уровней энергии в рассматриваемой потенциальной яме:

$$E > \gamma^2 + 1/4 \quad (\gamma = 1/2), \quad (29)$$

$$E > \gamma^2 - 1/4, \quad (0 < \gamma < 1/2). \quad (30)$$

Неравенство (29) описывает моды с частотами, близкими к частоте альвеновского континуума $\omega_A(x_0)$. При $\gamma = 0$ частота совпадает с $\omega_A(x_0)$. Неравенство (30) описывает дискретные моды с частотами, меньшими $\omega_A(x_0)$. Если $\gamma^2 \ll 1$, то неравенство (30) описывает дискретную моду с частотой, максимально отстоящей от граничной частоты альвеновского континуума. Из (30) при $\gamma^2 \gg 1$ получаем $\omega^2 \sim G$, откуда находим, что минимально возможная дискретная частота имеет вид

$$\omega_{\min}^2(x_0) \approx 1 - \frac{x}{k_z^2} \left(\frac{p}{x} \right). \quad (31)$$

Покажем, что в интервале $\omega_{\min} < \omega_A(x_0)$ лежит бесконечное множество частот ω_n с точкой сгущения на границе альвеновского континуума $\omega = \omega_A(x_0)$. Исходим из хорошо известного факта, что в случае квазиклассического движения частицы с энергией E в потенциальной яме $U(z)$ размер области движения $L(E)$ содержит целое

число полупериодов волны де Бройля $= [E - U(z)]^{1/2}$. В общем случае зависит от координаты z , однако для оценки высоколежащих энергетических уровней можно положить $E_n^{1/2}$, поскольку для них энергия отсчитывается от дна ямы. Это соображение позволяет записать следующие соотношение для стационарного уровня энергии E_n :

$$L(E_n) = \frac{n}{2} \frac{n\Gamma}{E_n^{1/2}}. \quad (32)$$

Характерный размер области, в которой может двигаться частица, $L(E_n) = |L_2 - L_1|$, где L_1 и L_2 — точки поворота, определяемые из уравнения

$$E_n = U(z = L_1, L_2). \quad (33)$$

Решая уравнение (33), находим

$$L(E_n) = \begin{cases} \ln(E_n / \dots), & 1/2, \\ 2 \ln(E_n^{1/2} / \dots), & 1/2. \end{cases} \quad (34)$$

Подставляя (34) в (32) и используя для энергии явное выражение (26), получаем

$$\begin{aligned} & (G - 1/4) \exp \frac{n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2, \\ & (G - 1/4)^2 \exp \frac{2n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2. \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим, что при больших значениях n значение $\frac{2}{n}$ экспоненциально стремится к нулю.

Таким образом, имеется счетная бесконечность собственных значений с точкой сгущения $= 0 (\dots_A(x_0))$, причем отношение последовательных собственных значений

$$\begin{aligned} & \exp \frac{n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2, \\ & \exp \frac{2n}{(G - 1/4)^{1/2}}, & 1/2 \end{aligned} \quad (36)$$

не зависит от n .

Заметим, что в случае 0 , стенка потенциальной ямы (25) удаляется на бесконечность. Известно, что в бесконечно широкой потенциальной яме уровни энергии стремятся ко дну ямы, что в нашем случае соответствует условию $G = 1/4$. Видно, что уравнение (35) содержит этот результат. При $= 0 (\dots_A(x_0))$ потенциал превращается в потенциальный барьер (см. рис. 4, в), в котором уровни энергии отсутствуют.

Полученные выше результаты хорошо согласуются с результатами более аккуратных расчетов, приведенных в работе [16, 19].

Остановимся на собственных функциях дискретных мод. Начнем рассмотрение с радиальной структуры и мод с минимальной частотой. С увеличением потенциальная яма (25) сужается, и при достаточно больших значениях ($\gg 1$) ее форма стремится к параболической, характерной для гармонического осциллятора. Это обстоятельство позволяет предположить, что спектр низколежащих уровней практически совпадает со спектром квантовомеханического осциллятора. Разложив потенциал (25) в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$, приходим к задаче об определении уровней энергии гармонического осциллятора:

$$\frac{d^2}{dz^2} [z^2] = 0, \quad (37)$$

где

$$G = \frac{1}{2} \omega^2 z^2 + \frac{1}{4} z^{-1/2}.$$

Из (37) находим выражение для уровней энергии в случае $\omega^2 \gg 1$ в виде

$$E_n = 2n + 1,$$

или

$$G_n = \frac{1}{2} \omega^2 (2n + 1) + \frac{1}{4} z^{-1/2}. \quad (38)$$

Уровни энергии (38) согласуются с ранее полученным результатом (29) для нижнего уровня ($n = 0$). Собственные функции в этом случае с точностью до замены $s = z$ совпадают с функциями (20).

Из общих свойств уравнения Шредингера следует, что для энергетических уровней, лежащих выше дна потенциальной ямы, собственные функции должны иметь вид синусоид в окрестности $z = 0$ и экспоненциально убывающих функций при $z \rightarrow \infty$. Рассмотрим в качестве примера случай $G = -1/4 \gg -\omega^2, 1/4$. Поскольку в этом предположении потенциальная яма (25) симметрична относительно точки $z = 0$, то достаточно ограничиться решением на интервале $(0, \infty)$.

В области $z < 1$ уравнение (24) упрощается и приводится к следующему виду:

$$\frac{d^2}{dz^2} z^2 = 0, \quad \omega^2 = G = \frac{1}{4}. \quad (39)$$

Очевидно, что линейно независимыми решениями этого уравнения будут функции

$$f_1 = (\cos z, \sin z). \quad (40)$$

В случае, когда $\exp z \gg 1$, уравнение (24) принимает вид

$$\frac{d^2}{dz^2} z^2 = \frac{\omega^2}{4} \exp(2z) = 0. \quad (41)$$

В качестве решения (41), убывающего при $z \rightarrow +\infty$, необходимо взять функцию Бесселя второго рода с мнимым порядком (см. Приложение 2):

$$H_{iz}^{(2)} \sim \frac{K_{iz}}{2} \exp z. \quad (42)$$

Сшивая решения (40) и (42) в области $1 < \exp(2z) < 2^2 / \epsilon^2$, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\epsilon^2 (16 / e^2) \exp[(n - 1/2) / \epsilon], \quad (43)$$

где константа e — основание натурального логарифма.

Сравнение дисперсионного соотношения (43) с первым соотношением ($\epsilon > 1/2$) в (35), полученным из качественного анализа в квазиклассическом приближении, показывает, что они практически совпадают. Отличие состоит лишь в постоянном предэкспоненциальном множителе. Проведенное рассмотрение подтверждает наши соображения о виде собственных функций для дискретных мод, лежащих внутри интервала $x_{\min}^2 \leq x^2 \leq x_A^2(x_0)$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе получены следующие результаты:

- показано, что использованная в работах [11, 12] модель радиально-неоднородного плазменного цилиндра адекватно описывает УНЧ-возмущения в магнитосфере Земли;

- получено уравнение малых колебаний (19) для УНЧ-мод. Показано, что это уравнение учитывает быструю магнитозвуковую волну, что является характерным для открытой магнитосферной системы;

- установлено, что появление быстрой магнитозвуковой волны в магнитосферной плазме приводит к генерации альвеновских волн с дискретным спектром. Этот результат подтверждает результат работы [12], в которой было показано, что такие моды генерируются вблизи максимума альвеновской частоты.

В данной работе показано, что дискретные альвеновские моды генерируются также вблизи минимума альвеновской частоты.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вывод уравнения (5). В работах по магнитной гидродинамике в плазменных системах с магнитными поверхностями обычно (см., например, работу [9]) вектор смещения элементарного объема плазмы представляется в виде

$$\vec{r} = \frac{a}{|a|^2} \frac{[\vec{B}, a]}{B^2} + \frac{\vec{B}}{B^2}, \quad (\text{П1.1})$$

где функция a , называемая меткой магнитной поверхности, удовлетворяет условию

$$\vec{B} \cdot a = 0. \quad (\text{П1.2})$$

Поскольку дипольное магнитное поле имеет вид

$$\vec{B} = [\quad], \quad (\text{П1.3})$$

где Φ — полоидальный магнитный поток, а λ — восточная геомагнитная долгота, то из уравнений (П1.2) и (П1.3) следует, что в качестве метки магнитной поверхности удобно выбрать полоидальный магнитный поток, т. е. положить

$$a = \Phi. \quad (\text{П1.4})$$

Из (П1.1), (П1.3) и (П1.4) получаем равенство

$$-\frac{\Phi}{|\vec{r}|^2} = \frac{[\Phi]}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{B}}{B^2} = \frac{\vec{B}}{B^2}. \quad (\text{П1.5})$$

Видно, что уравнение (П1.5) полностью совпадает с уравнением (5).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Решение (42) и его свойства. Покажем, что уравнение (41) имеет решение (42). Введём переменную

$$x = \frac{z}{2} \exp(z). \quad (\text{П2.1})$$

Тогда

$$\frac{d}{dz} = \frac{dx}{dz} \frac{d}{dx} = x \frac{d}{dx}. \quad (\text{П2.2})$$

В результате уравнение (41) принимает вид

$$x \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} [\quad - x^2] = 0. \quad (\text{П2.3})$$

Полученное уравнение удобно переписать в виде

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} x \frac{d}{dx} [(i \quad)^2 - x^2] = 0. \quad (\text{П2.4})$$

Модифицированные функции Бесселя являются решениями дифференциального уравнения вида

$$y^2 \frac{d^2 W}{dy^2} + y \frac{dW}{dy} - [p^2 - y^2]W = 0. \quad (\text{П2.5})$$

Фигурирующие в уравнении (П2.5) величины y и y^2 могут быть любыми числами, в том числе и комплексными [1]. Убывающее при y решение уравнения (П2.5) выражается через модифицированную функцию Бесселя

$$W = K_{\nu}(y). \quad (\text{П2.6})$$

Из (П2.4) — (П2.6) получаем решение (42):

$$K_{\nu} = \frac{1}{2} \exp z. \quad (\text{П2.7})$$

В области $(p^2 - x^2) \exp z < 0$ решение (П2.7) имеет асимптотику (см. работу [1])

$$K_{\nu}(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{4 \sqrt{p^2 - x^2}} e^{-p/2} \sum_{m=0}^{\infty} 2^m b_m \left(\frac{x}{p} \right)^m \sin \frac{m\pi}{2} + p \operatorname{Arch} \frac{p}{x} \sqrt{p^2 - x^2} - \frac{1}{4},$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \frac{x^2}{p^2}. \quad (\text{П2.8})$$

Асимптотика (П2.8) была использована нами при получении дисперсионного уравнения (43). Мы также использовали при получении этого дисперсионного уравнения равенство

$$\operatorname{Arch} \frac{p}{x} \sim \ln \frac{2p}{x},$$

справедливое при $p \gg x$.

Работа поддержана Целевой комплексной программой НАН Украины по физике плазмы (С. О. Черемных) и Целевой комплексной программой НАН Украины по космическим исследованиям (И. Т. Жук).

1. Бейтман Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1974.—296 с.
2. Гуссенс М. Магнитогидродинамическая волна и волновой нагрев неоднородной плазмы // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худда. — М.: Мир, 1995.—С. 144—178.
3. Климушкин Д. Ю. Пространственная структура азимутально-мелкомасштабных гидромагнитных волн в аксиально-симметричной магнитосфере с конечным давлением плазмы // Физика плазмы.—1997.—**23**, № 10.—С. 931—944.
4. Ладиков-Роев Ю. П., Черемных С. О. О распределении плазменного давления в экваториальной области магнитосферы земли // Космічна наука і технологія.—2010.—**16**, № 1.—С. 86—89.

5. Мазур Н. Г., Федоров Е. Н., Пилипенко В. А. Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэронавигация.—2012.—**52**.—С. 1—10.
6. Нишида А. Геомагнитный диагноз магнитосферы. — М.: Мир, 1980.—306 с.
7. Парновский А. С., Черемных О. К. Спектр баллонных возмущений с произвольной поляризацией во внутренней магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2006.—**12**, N 1.—Р. 49—56.
8. Прист Э. Р. Солнечная магнитогидродинамика. — М.: Мир, 1985.—589 с.
9. Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д. Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах // Вопросы теории плазмы.—1987.—Вып. 15.—С. 146—293.
10. Робертс Б. Магнитогидродинамические волны на Солнце // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худа. — М.: Мир, 1995.—С. 112—143.
11. Черемных О. К., Климушкин Д. Ю., Костарев Д. В. О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром // Кинематика и физика небес. тел.—2014.—**30**, № 5.—С. 3—21.
12. Черемных О. К., Климушкин Д. Ю., Магер П. Н. О структуре азимутальных мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с дискретным спектром // Кинематика и физика небес. тел.—2016.—**32**, № 3.—С. 26—39.
13. Черемных С. О. О поляризации поперечно-мелкомасштабных МГД-мод в магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2013.—**19**, № 4.—С. 57—64.
14. Agapitov O., Cheremnykh O. Magnetospheric ULF waves driven by external sources // arXiv preprint arXiv: 1512. 00919.—2015.
15. Agapitov O., Cheremnykh O. Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses // Ukrayins'kij Fyzichnij Zhurnal.—2008.—**53**, N 5.—P. 506—510.
16. Andrushchenko Zh. N., Cheremnykh O. K., Edenstrasser J. W. Global Alfvén eigenmodes in a stellarator with trapped energetic particles // Phys. Plasmas.—1999.—**6**, N 6.—P. 2462—2471.
17. Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Verkhoglyadova O. P. Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // Izvestiya Akad. Nauk. Ser. Fizicheskaya.—2000.—**64**, N 9.—P. 1896—1900.
18. Cheng C. Z. Magnetospheric equilibrium with anisotropic pressure // J. Geophys. Res.—1992.—**97A**, N 2.—P. 1497—1510.
19. Cheremnykh O. K., Revenchuk S. M. Dispersion relations for the Suydam problem // Plasma Phys. and Contr. Fusion.—1992.—**34**, N 1.—P. 55—75.
20. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. Flute and ballooning modes in the inner magnetosphere of the earth: stability and influence of the ionospheric conductivity // Space science: New research / Ed. by S. N. Maravell. — New York: Nova Science Publishers Inc., 2006.—P. 78—108.
21. Cheremnykh O. K. Transversally small-scale perturbations in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces // Plasma Phys. and Contr. Fusion.—2010.—**52**, N 9.—095006.
22. Cheremnykh O. K., Danilova V. Transversal small-scale MHD perturbations in space plasma with magnetic surfaces // Kinematics and Physics of Celestial Bodies.—2011.—**27**.—P. 98—108.
23. Cheremnykh S. O., Agapitov O. V. MHD waves in the plasma system with dipole magnetic field configuration // Adv. Astron. and Space Phys.—2012.—**2**.—P. 103—106.

24. *Edwin P. M., Roberts B.* Wave propagation in a magnetic cylinder // *Solar Phys.*—1983.—**88**.—P. 179—191.
25. *Erdelyi R., Fedun V.* Linear MHD sausage waves in compressible magnetically twisted flux tubes // *Solar Phys.*—2007.—**246**.—P. 101—118.
26. *Hameiri E., Kivelson M. G.* Magnetospheric waves and atmosphere — ionosphere layer // *J. Geophys. Res.*—1991.—**96A**, N 12.—P. 21125—21134.
27. *Hameiri F., Laurence P., Mond M.* The ballooning instability in space plasmas // *J. Geophys. Res.*—1991.—**96A**, N 2.—P. 1513—1518.
28. *Leonovich A. S., Kozlov D. A., Pilipenko A.* Magnetosonic resonance in dipole-like magnetosphere // *Ann. Geophys.*—2006.—**24**.—P. 2277—2289.
29. *Mager P. N., Klimushkin D. Yu., Pilipenko A., Schäfer S.* Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma // *Ann. Geophys.*—2009.—**27**.—P. 3875—3882.
30. *Mahajan S. M., Ross D. W., Chen G. L.* Discrete Alfvén spectrum in magnetohydrodynamics // *Phys. Fluids.*—1983.—**26**, N 8.—P. 2195—2199.

Статья поступила в редакцию 28.04.16

УДК 523.98

В. Н. Криводубский

Астрономическая обсерватория
Киевского национального университета имени Тараса Шевченко
ул. Обсерваторная 3, Киев, 04053
krivod2@ukr.net

Двойные максимумы 11-летних солнечных циклов

Для объяснения наблюдаемого явления двойных максимумов циклов солнечных пятен предложен сценарий, включающий генерацию магнитного поля возле дна солнечной конвективной зоны (СКЗ) и его последующий вынос из глубоких слоев на поверхность в «королевской зоне». В перестройке магнитного поля принимают участие пять процессов: α -эффект, магнитная плавучесть, макроскопический турбулентный диамагнетизм, ротационный β -эффект и меридиональная циркуляция. Установлено, что перестройка магнетизма в высокоширотных и приэкваториальном доменах СКЗ происходит в различных режимах. Ключевую роль в разработанном механизме играют две волны тороидальных полей от нижнего основания СКЗ к солнечной поверхности в приэкваториальном домене. Глубинные тороидальные поля, возбуждаемые α -эффектом в начале цикла вблизи тахоклина, благодаря комбинированному действию магнитной плавучести, турбулентного диамагнетизма и ротационного магнитного β -потока в приэкваториальном домене транспортируются к поверхности. Фрагменты этих магнитных полей через некоторое время можно наблюдать в виде биполярных групп пятен на средних широтах в «королевской зоне». Эта направленная вверх первая волна тороидальных полей дает основной максимум активности солнечных пятен. Вместе с тем в высокоширотных полярных доменах глубинные тороидальные поля в начале цикла заблокированы возле дна СКЗ двумя эффектами антиплавучести: направленными вниз турбулентным диамагнитным переносом и магнитной β -накачкой. Примерно через 1–2 года, когда направленное к экватору глубинное меридиональное течение вытеснит эти поля в низкоширотные участки приэкваториального домена (с благоприятными условиями для магнитного всплывания), наступает очередь подъема «запоздалых» магнитных полей (вторая волна тороидальных полей). Прорываясь на поверхность на

низких широтах, вторая порция тороидальных полей приводит к повторному максимуму солнечных пятен.

ПОДВІЙНІ МАКСИМУМИ 11-РІЧНИХ СОНЯЧНИХ ЦИКЛІВ, Криводубський В. Н. — Для пояснення спостережуваного явища подвійних максимумів циклів сонячних плям запропоновано сценарій, що включає генерацію магнітного поля поблизу дна сонячної конвективної зони (СКЗ) і його наступне винесення із глибоких шарів на поверхню у «королівській зоні». У перебудові магнітного поля беруть участь п'ять процесів: α -ефект, магнітна плавучість, макроскопічний турбулентний діамagnetизм, ротаційний ω -ефект і меридіональна циркуляція. Встановлено, що перебудова magnetизму у високоширотних і приекваторіальному доменах СКЗ відбувається у різних режимах. Ключову роль у розробленому механізмові подвійних максимумів відіграють дві хвилі тороїдальних полів від нижньої основи СКЗ до сонячної поверхні у приекваторіальному домені. Глибинні тороїдальні поля, які збуджуються α -ефектом на початку циклу поблизу тахокліну, завдяки комбінованій дії магнітної плавучості, турбулентного діамagnetизму і ротаційного магнітного ω -поток у приекваторіальному домені транспортуються до поверхні. Фрагменти цих магнітних полів через певний час можна спостерігати у вигляді біполярних груп плям на середніх широтах в «королівській зоні». Ця спрямована догори перша хвиля тороїдальних полів дає основний максимум активності сонячних плям. Разом з тим у високоширотних полярних доменах глибинні тороїдальні поля на початку циклу заблоковані біля дна СКЗ двома ефектами антиплавучості: спрямованими донизу турбулентним діамagnetизмом і магнітною ω -накачкою. Приблизно через 1—2 роки, коли спрямована до екватора глибинна меридіональна течія витісняє ці поля у низькоширотні ділянки приекваторіального домену (зі сприятливими умовами для магнітного спливання), настає черга підйому «запізнілих» магнітних полів (друга хвиля тороїдальних полів). Прориваючись на поверхню на низьких широтах, друга порція тороїдальних полів зумовлює повторний максимум сонячних плям.

DOUBLE MAXIMA 11-YEAR SOLAR CYCLES, by Krivodubskij V. N. — We propose a scenario to explain the observed phenomenon of double maxima of sunspot cycles, including the generation of the magnetic field near the bottom of the solar convection zone (SCZ) and its subsequent removal from the deep layers to the surface in the “royal zone”. Five processes are involved for reconstructing of the magnetic field: the α -effect, magnetic buoyancy, macroscopic turbulent diamagnetism, rotary ω -effect and meridional circulation. It was found that the reconstruction of magnetism in the high-latitude and equatorial domains of the SCZ occurs in different modes. A key role in the developed mechanism of double maxima play two waves of toroidal fields from the lower base of the SCZ bottom to the solar surface in the equatorial domain. Deep toroidal fields are excited due to the

-effect near tachocline at the beginning of the cycle. Then these fields are transported to the surface due to combined acting of magnetic buoyancy, macroscopic turbulent diamagnetism and rotary magnetic ω -flow in the equatorial domain. Over time these magnetic fragments can be seen as bipolar sunspot groups in the middle latitudes in the “royal zone”. This first wave of toroidal fields, which is directed up, gives the main maximum of sunspot activity. However, the underlying toroidal fields in the high-latitude polar domains at the beginning of the cycle are blocked near bottom of the SCZ by two antibuoyancy effects, directed downward turbulent diamagnetic transfer and magnetic ω -pumping. Deep meridional flow toward the equator transfers these fields to the low latitudes of the equatorial domain (where there are favourable conditions for magnetic floating) during about 1-2 years. Then “belated” magnetic fields float up /rise up to surface (second wave of toroidal field). This second portion of toroidal fields, coming to the solar surface at low latitudes, leads to second (repeated) sunspot maximum.

Введение. Солнечная активность (СА) — комплекс явлений и процессов в атмосфере Солнца, связанных с образованием и перестройкой сильных магнитных полей. Для статистического изучения СА вводят усредненные глобальные числовые характеристики (индексы), которые отражают особенности того или иного вида активности [3, 12]. Самым простым и исторически первым доступным для наблюдений проявлением СА были солнечные пятна. В 1844 г. Г. Швабе [85] обратил внимание на периодические изменения со временем количества пятен на Солнце. Р. Вольф в 1848 г. для определения меры «запятненности» Солнца предложил вычислять индекс W относительного числа солнечных пятен (впоследствии он получил название числа Вольфа). Число Вольфа представляет собой комбинацию полного числа групп пятен и числа пятен во всех группах на видимой поверхности Солнца в день наблюдений. Общепринятым количественным выражением уровня СА служат усредненные (за месяц, квартал или год) ежедневные значения чисел Вольфа. Они стали основой для изучения временных изменений пятнообразовательной деятельности Солнца. Р. Вольф впервые определил протяженность среднего периода изменений числа пятен около 11 лет.

Характерной особенностью открытой периодичности было то, что интервалы времени между годами максимальных и минимальных значений чисел Вольфа сильно отличались. Поэтому правильнее говорить не о периоде, а об 11-летнем цикле изменения чисел Вольфа. Вторым важным индексом, который используется при исследовании солнечной цикличности, служит суммарная площадь пятен. Этот индекс также изменяется со средним периодом около 11 лет, и по сравнению с числами Вольфа отличается сравнительно большей объективностью и надежностью. Современные обсерватории ведут регулярные патрульные наблюдения Солнца, используя в качестве меры активности оцен-

ку площадей пятен в миллионных долях площади видимой солнечной полусферы (м.д.п.). Индекс суммарной площади пятен в какой-то мере отражает величину сосредоточенного в пятнах магнитного потока через поверхность Солнца.

Двойные максимумы солнечных циклов. Характерной особенностью солнечной цикличности являются т. н. двойные циклы, которые описываются «двухвершинными» кривыми зависимости от времени большинства индексов СА [3]. Феномен двух максимумов в солнечном цикле был открыт М. Гневьшевым в 1963 г. при изучении коронального излучения и площадей активных образований [32]. Вначале М. Гневьшев проанализировал эволюцию среднегодовой суммарной яркости зеленой корональной спектральной линии 530.3 нм (которая служит непосредственной мерой магнитной активности и нагрева короны) в пятиградусных гелиоширотных интервалах в течение 19-го цикла и обнаружил два максимума индекса корональной интенсивности. Во время первого максимума (в 1957 г.) корональная интенсивность возрастала одновременно на всех широтах (при этом наибольшая ее интенсивность отмечалась на широтах поблизости 25°). Второй максимум наступил позже в 1959—1960 гг. и наблюдался только на низких широтах (15°). Аналогичное исследование широтного распределения значений среднегодовой площади протуберанцев и среднегодовой суммарной площади групп пятен для 19-го цикла также показало наличие двух максимумов на кривых временного изменения этих индексов.

А. Анталова и М. Гневьшев [14] решили проверить обнаруженную в 19-м цикле широтную особенность индекса суммарной площади групп пятен на базе наблюдательного материала других циклов. По Гринвичскому и Пулковскому каталогам наблюдений пятен они исследовали кривые временного изменения этого индекса для восьми 11-летних циклов за промежутки времени от 1874 г. до 1962 г. (12—18-й циклы) и получили такой же результат. Было установлено, что в каждом цикле всегда наблюдалось два максимума: первый проявлялся одновременно на всех широтах «королевской зоны» (по суммарным площадям пятен центрированный на широту 25°), тогда как второй — позже, и только на низких широтах (10...15°). Относительные амплитуды двух максимумов и временные промежутки между ними изменялись, так что в некоторых циклах при широтных усреднениях максимумы почти сливались, тогда как в других циклах локальный минимум между ними, известный как «щель Гневьшева» (Gnevyshev's gap), определялся достаточно четко. При этом, чем больше в цикле наблюдалось крупных пятен, тем отчетливее проявлялись два максимума. Впоследствии эти особенности были подтверждены и для 20-го цикла, в том числе и при раздельном рассмотрении северного и южного полушарий Солнца [33].

Согласно данным [33, 34] первый максимум площади групп пятен совпадает с основным максимумом 11-летнего цикла для чисел Воль-

фа, тогда как второй максимум связан с увеличением числа пятен крупных размеров (т. н. максимум мощности пятнообразования) [3, 52]. Другими словами, первый максимум является максимумом числа пятен, тогда как второй — максимумом их размеров [52]. В циклических кривых чисел Вольфа вторичные максимумы не всегда заметны, однако при отдельном учете пятен разных размеров можно обнаружить два максимума. Используя данные Гринвичского и Пулковского каталогов, М. Гневнышев [33] построил циклические кривые изменения усредненного (за восемь циклов) числа групп солнечных пятен с различными площадями. Оказалось, что маленькие пятна с площадью меньше 200 м. д. п. дают сглаженную 11-летнюю кривую чисел Вольфа с одним максимумом. Вместе с тем при отдельном рассмотрении больших пятен (с площадями соответственно более 200 м.д.п. и более 500 м.д.п.) 11-летние кривые чисел Вольфа отчетливо демонстрируют два максимума.

Разнообразие форм 11-летних кривых чисел Вольфа для разных циклов зависит от временного интервала между максимумами. Циклы с короткими интервалами имеют малую разрешающую способность и поэтому наблюдаются как циклы с одним максимумом с быстрым нарастанием и медленным убыванием активности. Два максимума разрешаются и отчетливо видны в циклах с длинными временными интервалами. Таким образом, взаимосвязь амплитуд максимумов и временные интервалы между ними определяют не только форму 11-летнего цикла, но и его длительность [37]. В частности, затяжной по продолжительности предыдущий 23-й цикл был четко двухвершинным. Начавшийся в 2009 г. 24-й цикл также оказался двойным. Он довольно быстро в 2012 г. достиг первого максимума по числам Вольфа. Однако в 2013 г. активность уменьшилась, и наступила стадия локального минимума, после которой число Вольфа снова начало увеличиваться. В результате 24-й цикл через два года после первого максимума вошел в фазу вторичного максимума (рис. 1).

Обнаружение в 11-летних циклах коронального излучения и площадей пятен двух максимумов вместо одного вначале казалось незначительной деталью. Однако в последующие годы было установлено, что все солнечные события: пятна, вспышки, протуберанцы, излучение короны, корпускулярное, радио- и ультрафиолетовое излучение имеют общее свойство — им присущи две разнесенные во времени волны активности, которые проявляются в виде двух максимумов 11-летних циклах [3, 33, 34]. В связи с этим возникла настоятельная необходимость поиска физических механизмов, объясняющих двойные максимумы. Нынче общепринято, что первичным фактором, который обуславливает как наличие пятен, так и циклические изменения всех индексов СА, служит взаимодействие магнитных полей с движениями плазмы. Очевидно, что и механизмы двойных максимумов должны опираться на эффекты замагниченной солнечной плазмы, охваченной турбулизированными конвективными движениями. Поэтому мы начнем

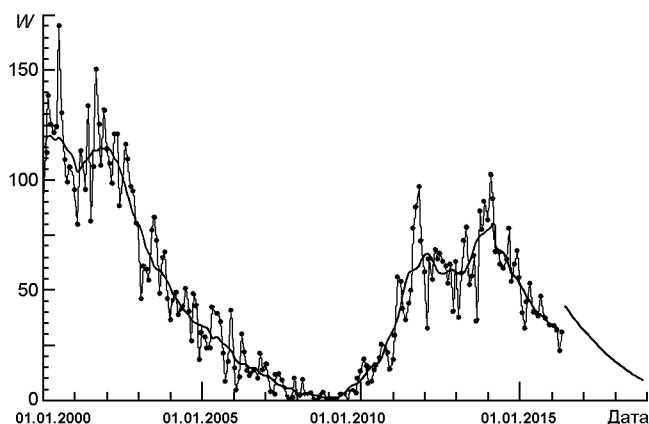


Рис. 1. Вариации чисел Вольфа W во второй половине 23-го цикла и в первой половине 24-го цикла (по состоянию на май 2016 г.): точки — наблюдаемые ежемесячные значения, жирная линия — сглаженные значения (<http://www.swpc.noaa.gov/products/solar-cycle-progression>)

с краткого изложения того, что известно о взаимодействии турбулизованной конвекции с магнитными полями на Солнце.

Турбулентность и перестройка магнетизма. Наблюдаемые движения вещества на солнечной поверхности и конвекция в подфотосферных слоях имеют чрезвычайно нерегулярный (турбулентный) характер. Согласно последним теоретическим исследованиям [4, 11] в настоящее время предполагаются несколько механизмов для объяснения природы развитой гидродинамической турбулентности. Кроме того, в последние годы из наблюдений получены важные результаты описания замагниченной турбулентности. В частности, в работе [7] установлено, что наблюдаемые турбулентные процессы на Солнце характеризуются двумя различными режимами (спектрами). Первый режим на малых масштабах с нулевым средним магнитным полем можно описать в рамках модели Колмогорова [8], тогда как на больших масштабах с отличным от нуля средним магнитным полем имеет место анизотропия турбулентных процессов, и поэтому процессы описываются спектром Крайчнана [54]. Переход от первого спектра ко второму происходит на масштабах около 3 тыс. км. Режим Крайчнана указывает на очевидную взаимосвязь между средним магнитным полем и наблюдаемыми крупномасштабными магнитными структурами. Наличие различных режимов турбулентности на Солнце открывает пути дальнейшего исследования взаимосвязи между параметрами турбулентной среды и наблюдаемыми пространственно-временными изменениями магнитных полей. Поэтому при изучении эволюции магнитных полей Солнца следует принимать во внимание различные спектры турбулентности, а также связанные с ними новые турбулентные эффекты перестройки магнетизма [1].

Напомним кратко эти эффекты. Как известно, поле скоростей на Солнце естественно разделено на крупномасштабную скорость U , отвечающую глобальному вращению, и мелкомасштабную скорость u

турбулентной конвекции. Поэтому для изучения эволюции магнитных полей в солнечной конвективной зоне (СКЗ) в последние десятилетия привлекаются методы макроскопической магнитогидродинамики (МГД), основанной на двухмасштабном подходе к исследуемым физическим параметрам. Макроскопическая МГД изучает поведение усредненных (крупномасштабных) магнитных полей, пространственные и временные масштабы которых значительно превышают характерные размеры или времена мелкомасштабных турбулентных и магнитных пульсаций. В результате выполненных процедур усреднения было открыто несколько новых эффектов турбулентности [1, 55, 93], отсутствующих в классической МГД. Суть первого принципиально нового эффекта заключается в способности спиральных турбулентных движений создавать электрическое поле, параллельное усредненному магнитному полю (т. н. α -эффект). При достаточно интенсивной спиральности в астрофизических объектах α -эффект возбуждает магнитные поля, которые могут противостоять их омической диссипации, открывая тем самым прямой путь к объяснению происхождения космического магнетизма. Именно α -эффект позволяет при моделировании довольно просто замкнуть магнитный динамо-цикл Солнца (см. ниже). В нашей недавней работе [64] показано, что мелкомасштабный α^2 -эффект Крайчнана в глубоких слоях СКЗ может в значительной степени способствовать самоорганизации слабых непрерывных магнитных полей в изолированные магнитные силовые трубки (МСТ). Вторую группу турбулентных эффектов составляют процессы, связанные с переносом и изменением масштабов магнитных полей (макроскопический турбулентный диамагнетизм, β -эффект и др.). Хотя самостоятельно они и не дают генерации, но могут играть существенную роль в моделях турбулентного динамо. Обычно их называют процессами турбулентной перестройки магнетизма [1]. Как установлено нами раньше [61], турбулентный макроскопический диамагнетизм играет существенную роль в обеспечении длительной стабильности пятен. Кроме того, турбулентность резко понижает величины электропроводности и магнитной проницаемости плазмы, что приводит к существенному уменьшению времени релаксации магнитных процессов и тем самым позволяет согласовать наблюдаемые и расчетные времена диссипации магнитных структур на Солнце [1, 55, 60]. Мы полагаем, что процессы турбулентной перестройки магнетизма могут сыграть важную роль при решении проблемы двойных максимумов солнечных циклов пятнообразования.

Глобальное магнитное поле и турбулентное динамо Солнца.

Нестационарные процессы на Солнце в основном связаны с локальными тонкоструктурными (дискретными) магнитными полями активных областей. Вместе с тем в основе практически любых теорий возникновения солнечного магнетизма лежит концепция крупномасштабного поля. Согласно современным представлениям [1, 19, 93] глобальное магнитное поле Солнца \mathbf{B} состоит из двух компонентов: глубинного

сильного тороидального (азимутального) поля \mathbf{V}_T , которое при вспышке определяет интенсивность пятнообразования, и слабого полоидального (меридионального) поля \mathbf{V}_P (0.1...0.2 мТл), силовые линии которого, выходя на солнечную поверхность, формируют фоновые магнитные поля. Наблюдения показывают, что оба компонента осциллируют по величине и знаку со средним периодом около 11 лет в противофазе [1, 22]. Очевидно, что глобальные магнитные компоненты связаны между собой и возбуждаются, наверное, одним процессом, который носит колебательный циклический характер.

Наибольшее распространение среди исследователей получили убеждения, что спусковым механизмом солнечного цикла служит процесс турбулентного гидромагнитного динамо, в результате которого часть энергии вращения и конвективных движений превращается в энергию магнитного поля. Роль «динамо-машины» на Солнце играет его конвективная зона, где в результате взаимодействия вращения (с угловой скоростью ω) и турбулизированной конвекции (со скоростью \mathbf{u}) создается специфическая комбинация дифференциального вращения и спиральной турбулентной конвекции. Динамо-теория объясняет циклическую активность Солнца действием двух основных эффектов. Суть первого эффекта состоит в генерации тороидального поля в результате действия дифференциального вращения на полоидальное поле (α -эффект); второй эффект обеспечивает превращение тороидального поля обратно в полоидальное вследствие спиральных турбулентных движений (β -эффект), замыкая тем самым солнечный магнитный цикл. Механизм поддержания циклических изменений глобального поля Солнца, основанный на этих двух эффектах, принято называть моделью α -динамо [1, 55, 93]. Однако этих двух эффектов недостаточно для построения реалистической модели магнитного цикла. Поэтому при построении сценария наблюдаемой картины магнитной циклической модели α -динамо следует дополнить вышеупомянутыми эффектами турбулентной перестройки магнетизма и меридиональной циркуляции (см. ниже). В результате проведенных исследований на основе модифицированных моделей α -динамо удалось объяснить значительную часть закономерностей и аномалий солнечной циклической активности [10, 17, 20—22, 27, 42, 48, 56—63, 67, 72, 74, 80]. Вместе с тем еще остался ряд наблюдаемых явлений и проблем СА, требующих объяснения. Одна из таких актуальных проблем — упомянутые выше двойные циклы солнечных пятен.

Поиск механизмов двойных максимумов. М. Гневышев считал, что проявляющиеся на разных широтах два максимума суммарной площади групп пятен статистически независимы [14, 33, 34]. Поэтому их происхождение он связывал с двумя различными физическими механизмами возбуждения магнетизма, но иногда временной промежуток между максимумами оказывается таким коротким, что его трудно обнаружить. В то же время М. Копецкий и Г. Куклин [52] полагали, что вторичный максимум связан с возрастанием доли мощных долго-

живущих групп пятен при непрерывном экваториальном дрейфе зоны пятнообразования.

В последние годы для объяснения двойного максимума циклов исследователи сосредоточили внимание на возможностях модифицированных моделей α -динамо с учетом наблюдаемых данных, полученных с борта космических аппаратов. Важным начинанием служит идея о наличии на Солнце двух основных компонентов фонового магнитного поля (ФМП), имеющих противоположную ориентацию в северном и южном полушариях [77, 78, 86, 96]. В результате обработки наблюдаемых данных за 21—23-й циклы в работах [86, 96] были выявлены две сдвинутые во времени (на четверть 11-летнего периода) широтные волны ФМП противоположной полярности, путешествующие от полюса до полюса через экватор. Сделан вывод, что при учете этих волн в рамках модели α -динамо можно объяснить двойной максимум цикла солнечных пятен. В недавних работах [77, 78] сделана попытка интерпретировать широтные вариации ФМП на основе двухслойной модели динамо. Для моделирования широтного распределения магнитных волн предполагалось, что α - и Ω -эффекты действуют одновременно в верхнем и нижнем слоях СКЗ, имеющих противоположные направления меридиональной циркуляции. Были также учтены фазовые различия между двумя динамо-волнами, возбуждаемыми в этих двух слоях. В результате построенной схемы было смоделировано одновременное наличие 22-летних и квазидвухлетних колебаний магнитных полей, ведущих к двойному циклу пятен. Заметим, что впервые объяснение одновременного наличия в СКЗ двух периодов колебаний магнитного поля было рассмотрено в работе [16] на основе двухуровневой модели α -динамо. В предложенной модели возбуждение низкочастотного магнитного компонента (~ 11 лет) происходит возле основания СКЗ за счет сильного радиального градиента скорости, тогда как высокочастотный компонент (~ 2.5 лет) генерируется вблизи солнечной поверхности, где более эффективным оказывается широтный градиент угловой скорости. Наличие двух магнитных периодов подтверждено в результате статистического анализа наблюдений магнитного поля в 23-м цикле [97]. В работе [98] предложена модель локального минимума цикла активности, которая базируется на гипотезе М. Гневышева об импульсах пятнообразования, связанных с двумя различными физическими механизмами возбуждения магнетизма [14, 33, 34]. Отметим также работу [28], в которой проанализировано несколько режимов динамо, зависящих от соотношения вкладов турбулентной диффузии и меридиональной циркуляции в механизм динамо с переносом магнитного потока. Было показано, что в определенных режимах динамо появляется возможность объяснения двойных максимумов циклов.

Однако, насколько нам известно, до сих пор при объяснении наблюдаемого двойного максимума цикла пятнообразования не привлекались отмеченные выше эффекты турбулентной перестройки магне-

тизма. Поэтому мы намерены восполнить этот пробел. В настоящей статье для объяснения феномена двухвершинных циклов мы предлагаем сценарий перестройки солнечного магнетизма, в котором принимают участие пять процессов: генерация тороидального поля из полоидального благодаря радиальному дифференциальному вращению у нижнего основания СКЗ (радиальный ω -эффект); направленная к экватору глубинная меридиональная циркуляция; магнитная плавучесть и два турбулентные эффекты переноса тороидального поля вдоль солнечного радиуса. Для прояснения физической сути предлагаемого сценария сделаем краткий обзор эффектов, которые мы привлекаем в предлагаемую схему перестройки.

Генерация тороидального поля. Общепринято, что радиальный градиент угловой скорости ω / r , действуя в солнечных глубинах на крупномасштабное полоидальное поле \mathbf{V}_p , трансформирует его в тороидальное поле \mathbf{V}_T (ω -эффект):

$$\mathbf{V}_T / t = r \sin \theta (\mathbf{V}_p \times \mathbf{i}), \quad (1)$$

где $\theta / r, r$ — относительный радиус Солнца, и \mathbf{i} — полярный угол и единичный азимутальный вектор в сферической системе координат. Обычно полагают, что наиболее благоприятным местом для генерации тороидального поля служат глубокие слои вблизи дна СКЗ, в районе тахоклина. В рамках модели динамо на основании данных наблюдений в работе [82] впервые была теоретически обоснована функциональная связь между интенсивностью пятнообразования и амплитудой полоидального поля, наблюдаемого в полярных областях в минимуме предыдущего цикла. На основании установленной функциональной зависимости отмеченных магнитных индексов соседних циклов был сделан удачный прогноз чисел Вольфа 21-го цикла. Выявленная корреляция обусловлена довольно стабильной регулярностью дифференциального вращения ω / r , которой присущи лишь незначительные изменения со временем [48]. Поскольку $V_T \sim V_p \omega / r$, то при почти стабильной величине ω / r полоидальное поле в эпоху минимума цикла определяет величину тороидального поля, а значит и активность пятнообразования в следующем цикле. В. Макаров и др. [66] выявили высокую линейную корреляцию между введенным ими A -индексом (магнитным моментом полоидального поля) и амплитудой следующего максимума. Впоследствии в работе [46] были установлены зависимости чисел Вольфа от дипольного момента, определенного на основе A -индекса, и от дипольного момента, полученного в результате прямых измерений полярного магнитного поля в минимуме [89]. Выявленные со временем убедительные доказательства строгой корреляции между наблюдаемыми магнитными гелиофизическими параметрами использовались для более-менее успешных прогнозов мощности наступающих новых циклов [21, 23, 46, 66, 69]. Впоследствии значительное улучшение прогнозов было достигнуто при включении в численные модели динамо глобальных меридиональных

потоков вещества [15, 25, 45, 71, 76, 90, 94]. Следует также отметить оригинальный метод моделирования динамо-процесса, учитывающий неопределенности измеренных турбулентных характеристик в солнечной атмосфере [50]. В рамках этого метода при учете переменности магнитной спиральности удалось получить приемлемое согласие между прогнозами предыдущих солнечных циклов и наблюдаемыми данными.

Меридиональная циркуляция. Распространение динамо-волн не в состоянии адекватно объяснить наблюдаемую миграцию солнечных пятен к экватору. Поэтому было предложено объяснение экваториальной миграции вследствие глубинных меридиональных потоков [24, 70, 92]. На солнечной поверхности слабое крупномасштабное меридиональное течение вещества направлено от экватора к полюсам. Сначала оно было обнаружено путем отслеживания движений магнитных структур [51, 73, 87] и прямыми измерениями доплеровского смещения в спектральных линиях [35]. Амплитуда скорости этого поверхностного меридионального течения на средних гелиоширотах составляет $U_M^{(surf)} \approx 5 \dots 15$ м/с. В последующие годы гелиосейсмические измерения показали, что направленное к полюсам меридиональное течение диагностируется методами локальной гелиосейсмологии [31] внутри Солнца до глубин $r \approx 0.85R$ [18, 30]. Исключение составляют только локальные и очень близкие к поверхности участки в окрестности активных центров [53, 95]. Отметим также метод расчета поверхностной скорости меридионального течения на основе анализа гео- и гелиомагнитных данных (опоздание во времени максимумов aa-индексов геомагнитной активности по отношению к максимумам чисел Вольфа в 10—23-м циклах) [28, 29]. Полученная этим методом оценка $U_M^{(surf)} \approx 4 \dots 18$ м/с совпадает с результатами спектроскопических измерений [35].

В то же время согласно закону сохранения вещества у нижнего основания СКЗ должно наблюдаться меридиональное течение противоположного направления, от полюсов к экватору. При таком условии вещество у полюсов должно опускаться вниз к тахоклину, тогда как у экватора оно должно подниматься из глубин на поверхность, чтобы таким образом обеспечить замкнутый цикл меридиональной (полоидальной) циркуляции вещества в СКЗ (одна гигантская ячейка) [39, 70]. В результате численного моделирования на основе гелиосейсмологических экспериментов было продемонстрировано, что меридиональная циркуляция охватывает все слои СКЗ и даже может проникать ниже тахоклина в радиативную зону [36, 40, 43]. При этом рассчитанный профиль течений имеет сложную пространственную структуру, состоящую из нескольких ячеек, распределенных по глубине и широте (мультиячейчатая структура циркуляции) [81, 94]. Однако на сегодня нет полной ясности о профиле полоидальных потоков вещества в солнечных глубинах (одна, две или больше ячеек). Поэтому в дальнейшем для простоты расчетов мы ограничимся рассмотрением

одной глобальной ячейки циркуляции. Скорость направленного к экватору глубинного течения $U_M^{(deep)}$ нельзя измерить непосредственно. Поэтому для ее расчета исследователям приходится применять косвенные методы. В частности, в работе [28] в рамках упомянутого выше метода получена оценка $U_M^{(deep)} \approx 2...5$ м/с, которая удовлетворительно согласуется с оценкой $U_M^{(deep)} \approx 1.5...3$ м/с, полученной из анализа скорости миграции полосы солнечных пятен к экватору [38].

Магнитная плавучесть. Механизм магнитной плавучести был предложен в 1955 г. Е. Паркером [75] и одновременно независимо Э. Йенсенем [44]. Идея состояла в том, что плотность вещества в изолированных горизонтальных МСТ оказывается меньшей, чем плотность окружающей среды. Поэтому в астрофизических объектах в гравитационном поле на силовую трубку действует подъемная архимедова сила. Паркер оценил скорость подъема МСТ в неоднородной атмосфере для случая, когда подъемная сила трубки компенсируется аэродинамическим сопротивлением среды. При таком условии скорость магнитного всплывания поля величиной B примерно равняется альвеновской скорости c_a :

$$U_B(B, \rho) \approx c_a \left(\frac{B^2}{4\pi\rho} \right)^{1/2}. \quad (2)$$

Вблизи солнечной поверхности, где плотность плазмы оказывается достаточно малой величиной, скорость всплывания U_B становится очень высокой, тогда как в глубоких плотных слоях эффективность плавучести в значительной степени уменьшается. Поэтому обычно полагают, что наиболее подходящим местом локализации механизма генерации тороидального поля являются глубинные слои СКЗ. Вместе с тем даже здесь трудно обеспечить значительное усиление полей и длительное их удержание в течение времени, сравнимого с периодом солнечного цикла, вследствие быстрой эвакуации сильных полей из зоны генерации. Поэтому возникает необходимость поиска механизмов магнитной «антиплавучести» (отрицательной магнитной плавучести), компенсирующих быстрое всплывание полей. Как оказалось [56, 60], роль таких механизмов в гравитационном поле могут сыграть упомянутые выше процессы турбулентного переноса крупномасштабных полей.

Впоследствии оценка Паркера была дополнена расчетами других исследователей. В. Унно и Э. Риббе [91] в качестве тормозящей силы принимали турбулентную вязкость, тогда как М. Шюсслер [84] и В. Кузнецов и С. Сыроватский [65] учитывали стратификацию по плотности внешней среды и расширение МСТ при их подъеме. Ф. Морено-Инсертис [68] рассмотрел варианты всплывания адиабатических и изотермических МСТ, как для аэродинамического сопротивления, так и для турбулентной вязкости внешней среды. Во всех случаях скорость магнитного всплывания трубок зависела от величины поля и плотности вещества. В наших работах [56, 57] была проанализирована эффективность различных механизмов всплывания в СКЗ. Оказалось,

что наибольшая скорость всплывания поля выявляется в механизме Паркера. Поэтому в дальнейшем при расчетах перестройки солнечного магнетизма мы будем принимать во внимание паркеровский механизм всплывания как самый неблагоприятный с точки зрения удержания полей в зоне генерации. Переходим к рассмотрению процессов турбулентной перестройки крупномасштабного магнетизма.

Макроскопический диамагнетизм. Я. Зельдович [5] исследовал процесс турбулентной перестройки магнитного поля, который впоследствии получил название макроскопический диамагнитный эффект [79]. Физический смысл макроскопического турбулентного диамагнетизма плазмы состоит в эффекте вытеснения усредненного магнитного поля B из участков с повышенной интенсивностью турбулентных пульсаций в места с менее развитой турбулентностью [1, 55] вдоль градиента турбулентной вязкости $\tau = (1/3)ul$ (l — характерный масштаб турбулентных пульсаций) с эффективной скоростью

$$U = - \tau/2. \quad (3)$$

Поскольку на Солнце параметры турбулентной конвекция существенно изменяются с глубиной, то здесь создаются благоприятные условия для макроскопического диамагнетизма. В наших работах [9, 60] показано, что рассчитанный для модели СКЗ Стикса [88] радиальный профиль турбулентной вязкости τ выглядит гладкой выпуклой функцией с максимумом ($\tau = 10^{13}$ см²/с) примерно посередине конвективной зоны на глубине $z = 130$ тыс. км (рис. 2).

Обнаруженная вертикальная неоднородность турбулентной вязкости указывает на сильные диамагнитные свойства солнечной турбулизированной плазмы. В верхней половине СКЗ турбулентный диамагнетизм проявляет себя подобно магнитной плавучести — выталкивает горизонтальное магнитное поле к поверхности. В то же время вблизи дна СКЗ, где интенсивность турбулентной конвекции резко уменьшается до нуля, макроскопический диамагнетизм действует против магнитной плавучести, играя тем самым роль отрицательной магнитной плавучести. Поэтому в глубоких слоях создаются благоприятные условия для длительного удержания тороидального магнитного поля, возбуждаемого α -эффектом. Согласно нашим расчетам скорость направленного вниз диамагнитного вытеснения горизонтального поля в глубинных слоях достигает значений $U = 2 \cdot 10^3$ см/с, что существенно уменьшает эффективность всплывания поля. Поскольку скорость магнитного всплывания U_B зависит от величины поля (2), то из условия взаимной компенсации скоростей магнитного всплывания и диамагнитного погружения полей ($U_B(B_0) = U$) можно найти значение горизонтального стационарного поля $B_0 = (U \tau)^{1/2}$, всплывание которого будет полностью скомпенсировано турбулентным диамагнетизмом. Вблизи основания СКЗ получаем оценку B_0

0.32 Тл. Таким образом, в области направленного вниз диамагнитного потока должен формироваться горизонтальный слой заблокиро-

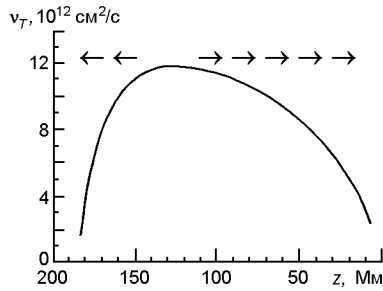


Рис. 2. Распределение по глубине z величины коэффициента турбулентной вязкости $\nu_t \approx (1/3)ul$, рассчитанного в приближении теории длины смешивания для модели СКЗ Стикса [88]. Горизонтальные стрелки показывают направление турбулентного диамагнитного переноса поля вдоль радиуса Солнца со скоростью U

ванного магнитного поля. Вместе с тем следует помнить, что магнитное поле этого слоя будет подавлять турбулентную конвекцию. В связи с этим рассмотрим модификацию диамагнитного эффекта при наличии магнитного поля.

Как показано в работе [49], в нелинейном режиме скорость диамагнитного переноса поля приобретает вид

$$U_D(\eta) = 6U \cdot D(\eta), \tag{4}$$

где $D(\eta)$ — функция магнитного подавления кинематического турбулентного диамагнитного переноса, $\eta = B/B_{eq}$ — параметр нормализованного магнитного поля, $B_{eq} = u(4\pi)^{1/2}$ — равномерно распределенная магнитная индукция, которая возбуждается мелкомасштабными турбулентными пульсациями. В случае физических параметров и магнитных полей, характерных для глубинных слоев СКЗ ($\eta^2 \ll 1$), функция подавления определяется выражением

$$D(\eta) \approx [(1/6) - \eta^2/5], \tag{5}$$

нормированным на $D_0 = 1/6$ при $\eta = 0$. Условие баланса скоростей конкурирующих эффектов в магнитном слое вблизи дна СКЗ в нелинейном режиме

$$U_B(B_0) - U_D(B_0) = 0 \tag{6}$$

приводит к следующим оценкам величин: $B_0 = U_D(4\pi)^{1/2} \approx 0.27$ Тл, $U_D \approx 1.7 \cdot 10^3$ см/с.

Таким образом, проведенные нами расчеты показали, что радиальная неоднородность турбулентности способствует образованию в СКЗ двух слоев с разными вертикальными направлениями переноса горизонтального поля. Чрезвычайно важно, что в нижнем слое турбулентный диамагнетизм действует против магнитной плавучести. В результате снимается обусловленное магнитной плавучестью ограничение на генерацию α -эффектом в глубоких слоях довольно мощного тороидального поля (около 0.27 Тл). Обращаем внимание на то, что в дальнейшем при построении сценария перестройки магнетизма мы для нижнего слоя будем принимать во внимание скорость U_D , тогда как в верхнем слое (выше глубин $z \approx 130$ тыс. км, где нет магнитного подавления турбулентности) будет использоваться кинематическое значение скорости диамагнитного переноса U .

Магнитная накачка в неоднородной по плотности турбулентной среде. Рассмотрим еще один процесс турбулентной перестройки магнетизма, который в СКЗ может играть роль антиплавучести. В неоднородной по плотности турбулентной среде при определенных условиях возникает направленный вдоль перенос магнитного поля, обусловленный мелкомасштабными магнитными пульсациями (т. н. магнитная накачка). Явление магнитной накачки было открыто для двухмерной турбулентности Э. Дробышевским [26], а затем обобщено С. Вайнштейном [2] на случай трехмерных движений. Формально суть явления можно описать следующим образом [6]. Амплитуда магнитных флуктуаций \mathbf{b} , порождаемых турбулентными пульсациями скорости \mathbf{u} , в неоднородной среде увеличивается в направлении роста плотности среды: $b^2 \propto u^2$. Вместе с ней в этом направлении увеличивается и амплитуда флуктуационных токов $\mathbf{j} = (c/4\pi) \text{rot } \mathbf{b}$. Эти модифицированные токи возбуждают дополнительное магнитное поле \mathbf{V} , которое складывается с исходным полем \mathbf{B} , в результате чего изменяется первоначальное распределение глобального магнетизма в пространстве. В конечном итоге в нелинейном режиме пространственное перераспределение поля эквивалентно его переносу в направлении роста плотности плазмы. При условии равномерного распределения плотностей кинетической $u^2/2$ и магнитной $b^2/8$ энергий мелкомасштабных пульсаций выражение для эффективной скорости магнитной накачки приобретает вид [2, 6]

$$U = (1/6) (b^2/4\pi) \tau \quad (1/6) u^2 / \tau, \quad (7)$$

где τ — характерное время турбулентных пульсаций. Чтобы подчеркнуть роль градиента плотности плазмы в возникновении эффекта магнитной накачки, мы будем называть его τ -эффектом замагниченной турбулентной плазмы [60].

Плотность солнечного вещества в радиальном направлении от фотосферных слоев до нижнего основания СКЗ возрастает почти на шесть порядков величины. Поэтому здесь должен возникнуть направленный вниз интенсивный магнитный поток U . Действительно, проведенные нами расчеты [60] для физических параметров из модели СКЗ [88] показали, что величина скорости нисходящей накачки U изменяется в диапазоне от $6 \cdot 10^3$ см/с вблизи поверхности ($z \approx 20$ тыс. км) до $2 \cdot 10^3$ см/с возле дна СКЗ ($z \approx 180$ тыс. км). Таким образом, τ -эффект в зоне турбулентной конвекции, подобно турбулентному диамагнетизму в глубоких слоях, играет роль механизма антиплавучести.

Вращение Солнца порождает анизотропию конвекции, которая наделяет τ -эффект новыми свойствами [47]. Влияние вращения приводит к относительному увеличению масштабов конвективных пульсаций вдоль оси вращения. Степень возмущения конвекции вращением определяется числом Кориолиса $\text{Co} = 2\Omega\tau$ (обратное число Россби). Наиболее существенная модификация происходит при умерен-

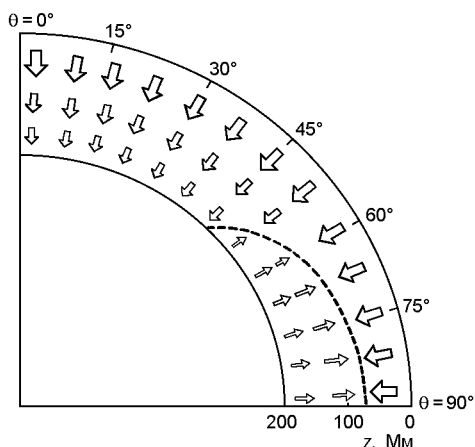
ном вращении у дна СКЗ (5). При этом трансформация α -эффекта зависит от углового расстояния от полюсов. Если у полюсов градиент плотности оказывается параллельным оси вращения, то по мере приближении к средним, а затем и низким широтам, он постепенно изменяет свое направление, так что на экваторе вектор α становится перпендикулярным к оси вращения. При таких условиях α -эффект с учетом вращения осуществляет «селекцию полей», в результате чего тороидальный и полоидальный магнитный компоненты переносятся в радиальном и меридиональном направлениях независимо, с различными (по величине и знаку) скоростями. Наибольшую актуальность приобретает исследование радиального переноса тороидального поля B_T , поскольку выход этого поля на поверхность приводит к формированию солнечных пятен. Оказалось, что направление (вниз или вверх) и скорость переноса тороидального поля существенно зависят от глубины z , полярного угла θ и числа Кориолиса [47, 60]:

$$U_r^T(z, \theta) = 6U(z) \{ \alpha_2[z] - \alpha_1[z] \sin^2 \theta \}. \quad (8)$$

Функции числа Кориолиса $\alpha_1[z]$ и $\alpha_2[z]$ описывают влияние вращения на турбулентную конвекцию. В зависимости от знака множителя $\{ \alpha_2[z] - \alpha_1[z] \sin^2 \theta \}$ магнитный поток тороидального поля может быть направлен как вниз (когда этот знак положительный), так и вверх (когда знак множителя отрицательный).

Согласно данным гелиосейсмологических экспериментов [41, 83] поле угловой скорости (r, θ) в СКЗ естественно разделено на домены быстрого и медленного вращения с противоположными знаками радиального градиента угловой скорости. В приэкваториальном (низкоширотном, $\theta^* < 45^\circ$) домене быстрого вращения угловая скорость в основном уменьшается с глубиной ($r/r_0 > 0$), тогда как в околополюсных (высокоширотных, $\theta^* > 45^\circ$) доменах медленного вращения она, наоборот, увеличивается внутрь Солнца ($r/r_0 < 0$) (здесь $\theta^* = 90^\circ - \theta$ — гелиоширота). Достоверность этой картины распределения угловой скорости в СКЗ была подтверждена независимыми теоретическими расчетами на основе релаксационной модели магнитного цикла [13]. При расчетах числа Кориолиса $\alpha(z)$ и функций $\alpha_1[z]$ и $\alpha_2[z]$ мы воспользовались данными о распределении угловой скорости из работы [41]. Расчеты для модели СКЗ [88] показали, что в высокоширотных участках ($\theta^* > 45^\circ$) скорость переноса тороидального поля $U_r^T(z, \theta)$ по всей вертикальной протяженности конвективной зоны направлена вниз (рис. 3). В то же время в приэкваториальном домене ($\theta^* < 45^\circ$) направление переноса зависит от радиуса: в верхней части СКЗ магнитный α -поток направлен также вниз, однако в нижней части он изменяет направление на противоположное — вверх. По сути это значит, что мы обнаружили на Солнце три области с различными условиями радиального переноса тороидального поля

Рис. 3. Меридиональный разрез СКЗ, который демонстрирует распределение радиальной скорости переноса тороидального магнитного поля $U_r^T(z, \theta)$ по глубине z и кошироте θ (число Кориолиса изменяется в диапазоне от единицы в поверхностных слоях до пяти вблизи дна СКЗ). Стрелки показывают направление переноса, скорость которого изменяется примерно от 100...300 см/с вблизи дна СКЗ до 10^4 см/с в поверхностных слоях [60]. Штриховая кривая отвечает линии нулевой скорости $U_r^T(z, \theta) = 0$, где происходит изменение направления переноса



вследствие ротационного β -эффекта. Первая область, где поля переносятся вниз, охватывает два околополюсных домена (по одному в каждом полушарии). Вместе с тем приэкваториальный домен, совпадающий по широте с «королевской зоной» пятен, разделен по радиусу на два слоя (нижний и верхний), в которых поля переносятся в разных направлениях — соответственно вверх и вниз. Принципиально важно, что в нижнем слое приэкваториального домена направление магнитного β -потока совпадает с направлением магнитной плавучести. Как будет показано ниже, это существенным образом отобразится на картине перестройки полей. Другими словами, из рис. 3 видно, что в большей части СКЗ направленный вниз перенос противодействует магнитной плавучести. Однако в глубоких слоях в приэкваториальном домене (начиная с гелиошироты $\theta \approx 45^\circ$ у дна СКЗ) магнитный поток, вызванный β -эффектом, становится направленным вверх. Поэтому здесь β -эффект помогает магнитному всплыванию и, таким образом, способствует прорыву сильных полей к поверхности, где они наблюдаются как солнечные пятна в «королевской зоне».

Перестройка тороидального поля. Проанализируем теперь картину переноса тороидального поля (возбуждаемого β -эффектом возле дна СКЗ) вследствие комбинированного действия магнитной плавучести, турбулентного диамагнетизма и β -эффекта (рис. 4).

Рассмотрим ситуацию отдельно для приполярных (высокоширотных) и приэкваториального доменов. В нижней части приполярных участков турбулентный диамагнетизм и β -эффект вытесняют горизонтальные магнитные поля в глубинные слои [60]. Действуя против магнитной плавучести, они в значительной мере нейтрализуют всплывание полей. Из условия баланса скоростей конкурирующих эффектов

$$U_B + U_D + U_r^T = 0 \quad (9)$$

(здесь вертикальные стрелки указывают направление переноса) можно определить величину равновесного магнитного поля, заблокиро-

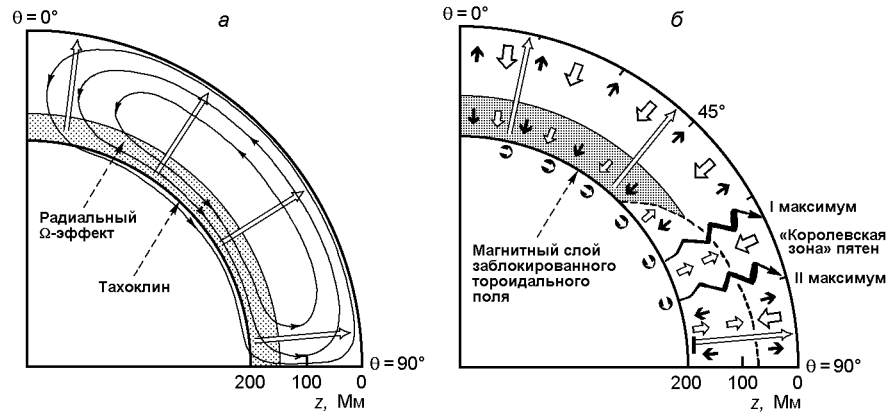


Рис. 4. Схема турбулентной перестройки тороидального магнитного поля в СКЗ: *а* — меридиональная циркуляция (замкнутые линии со стрелками), захватывающая глубинные слои ниже тахоклина, магнитная плавучесть (длинные светлые стрелки) и слой радиального Ω -эффекта (заштрихованный участок) вблизи дна СКЗ; *б* — меридиональный перенос (значки \odot) заблокированного возле полюсов глубинного тороидального поля (заштрихованный участок) из высокоширотных областей в приэкваториальный домен вследствие глубокого полоидального течения; две направленные к поверхности волны тороидального поля (ломаные стрелки), обусловленные комбинированным действием магнитной плавучести (длинные светлые стрелки), макроскопического турбулентного диамагнетизма (короткие черные стрелки) и Ω -переноса магнитного поля (короткие светлые стрелки), вызывающие в «королевской зоне» солнечных пятен сдвинутые во времени на 1-2 года первый и второй максимумы пятен

ванного вблизи дна СКЗ:

$$B_0 = (U_D + U_r^T) (4 \dots)^{1/2}. \quad (10)$$

Для физических условий на глубине $z = 180$ тыс. км ($\rho = 0.2$ г/см³ [88], $U_D = 1.7 \cdot 10^3$ см/с [60], $U_r^T = 100$ см/с [60]) получаем оценку заблокированного поля $B_0 = 0.29 \dots 0.3$ Тл.

Таким образом, в высокоширотных доменах в глубинных слоях два эффекта антиплавучести способны нейтрализовать всплывание достаточно интенсивных полей, в результате чего вблизи тахоклина должен формироваться магнитный слой мощного тороидального поля. Очевидно, именно из-за двух эффектов антиплавучести укоренившиеся в этом слое сильные глубинные приполярные тороидальные поля не могут прорваться к поверхности, чтобы наблюдаться на высоких широтах в виде солнечных пятен.

В то же время совсем другая картина транспортировки тороидального поля создается в приэкваториальном домене ($\theta = 0 \dots 45^\circ$). Как видно из рис. 3 и 4, здесь магнитный Ω -поток в глубоких слоях, как и магнитная плавучесть, направлен вверх, поэтому условие баланса полей приобретает новый вид, отличный от условия (10):

$$U_B + U_D + U_r^T = 0. \quad (11)$$

Именно этот направленный вверх магнитный \mathbf{U}_B -поток (U_B^T 100 см/с для гелиошироты $\theta \approx 20^\circ$) помогает магнитной плавучести ($U_B \approx 1.6 \cdot 10^3 \text{ см/с}$) нейтрализовать турбулентный диамагнетизм ($U_D \approx 1.7 \cdot 10^3 \text{ см/с}$). По сути \mathbf{U}_B -поток служит триггерным механизмом, который в приэкваториальном домене запускает процесс подъема сильных глубинных полей к поверхности. В этом случае величина заблокированного поля определяется выражением

$$B_0 = (U_D - U_B^T) (4 \Omega)^{1/2}. \quad (12)$$

и оказывается заметно меньшей ($B_0 \approx 0.25 \text{ Тл}$), чем в приполярном домене. Поэтому сильные тороидальные поля величиной более 0.25 Тл должны достаточно быстро переноситься вверх (расчеты времени подъема полей см. ниже). Максимальная гелиоширота вблизи дна СКЗ, где \mathbf{U}_B -эффект способствует всплытию полей, соответствует величине $\theta \approx 45^\circ$ (см. рис. 3), которая совпадает с широтой полярной границы «королевской зоны».

Рассмотрим теперь, что происходит в верхних слоях приэкваториального домена. Здесь турбулентный диамагнетизм и \mathbf{U}_B -эффект изменяют свои знаки на противоположные. Напомним, что в верхней части СКЗ выше глубины $z \approx 130 \text{ тыс. км}$ при расчетах следует принимать во внимание скорость кинематического диамагнитного переноса \mathbf{U} . Поэтому новое условие баланса полей приобретает вид

$$\mathbf{U}_B + \mathbf{U} + \mathbf{U}_r^T = 0. \quad (13)$$

Расчеты показали, что здесь низкая плотность вещества приводит к очень высокой скорости магнитного всплывания полей величиной около 0.25 Тл : $U_B \approx 4 \cdot 10^3 \text{ см/с}$. Эта скорость значительно превышает примерно равные по величине скорости двух других эффектов магнитного переноса ($U \approx 500 \text{ см/с}$, $U_r^T \approx 500 \text{ см/с}$), которые нейтрализуют друг друга. В конечном итоге в верхней части СКЗ приэкваториального домена основную роль в транспортировке полей к поверхности играет магнитная плавучесть.

Расчет максимумов двухвершинных циклов. Наиболее благоприятным местом для генерации тороидального поля вследствие \mathbf{U}_B -эффекта служат глубинные слои вблизи дна СКЗ, поскольку здесь плотность кинетической энергии дифференциального вращения значительно превышает плотность магнитной энергии. Кроме того, в глубинных слоях плотность вещества имеет наибольшее значение в СКЗ, поэтому здесь скорость магнитного всплывания $U_B = B/(4 \Omega)^{1/2}$, генерируемого в начале цикла радиальным дифференциальным вращением, оказывается недостаточной, чтобы быстро эвакуировать поле из зоны генерации. В результате, прежде чем плавучесть по мере нарастания величины магнитной индукции вступит в действие, здесь

вследствие радиального α -эффекта успевают сгенерироваться довольно мощное поле.

Характер последующей транспортировки сгенерированного глубинного поля к поверхности зависит от гелиошироты (см. рис. 4). Как показано выше, в высокоширотных доменах глубинные поля (0.29... 0.3 Тл) заблокированы вблизи дна СКЗ направленными вниз двумя эффектами антиплавучести: турбулентным диамагнетизмом и магнитной α -накачкой.

В то же время в глубоких слоях приэкваториального домена два направленные вверх магнитные потоки (паркеровская плавучесть и магнитный α -поток) преобладают над турбулентным диамагнетизмом и обеспечивают тем самым достаточно быстрый вынос сильных глубинных полей на поверхность. Продемонстрируем это на примере поля величиной 0.25 Тл, для которого величина скорости паркеровского всплытия U_B у дна СКЗ составляет $1.6 \cdot 10^3$ см/с. Скорости двух других магнитных потоков согласно нашим расчетам имеют здесь следующие значения: $U_r^T = 100$ см/с (для $\alpha = 20^\circ$), $U_D = 1.7 \cdot 10^3$ см/с.

При таких условиях время t_1 направленного вверх радиального переноса поля величиной 0.25 Тл от дна СКЗ ($z_0 = 180$ тыс. км) до слоя на глубине $z_1 = 80$ тыс. км (где происходит изменение направления магнитного α -потока) в радиальной плоскости $\alpha = 20^\circ$ составляет

$$t_1 = (z_0 - z_1) / (U_B - U_r^T - U_D) = 3 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 1 \text{ год.}$$

Проанализируем теперь ситуацию в верхней части приэкваториального домена. Здесь турбулентный диамагнетизм и α -эффект практически компенсируют друг друга ($U = 500$ см/с, $U_r^T =$

500 см/с). В результате высокая скорость магнитной плавучести в этом слое приводит к очень быстрому подъему поля на поверхность. Рассчитанное время t_2 транспортировки поля величиной 0.25 Тл из глубины $z_1 = 80$ тыс. км, где $U_B = 4 \cdot 10^3$ см/с, к поверхности ($z_2 = 0$ км) оказывается довольно коротким: $t_2 = (z_1 - z_2) / (U_B + U - U_r^T) = 3.2 \cdot 10^6$ с (≈ 1 мес.).

В результате общее время выноса тороидального поля $t = t_1 + t_2$ от дна СКЗ на поверхность определяется в основном временем t_1 и составляет около одного года.

Итак, в течение фазы нарастания цикла глубинные тороидальные поля, сгенерированные радиальным α -эффектом, в приэкваториальном домене благодаря комбинированному действию магнитной плавучести и двух турбулентных эффектов перестройки магнетизма транспортируются к поверхности, где через относительно короткое время (около года) наблюдаются на фотосферном уровне в виде пятен в широтной полосе ($\alpha = 45 \dots 20^\circ$) «королевской зоны». Эта первая направленная вверх волна тороидального поля ответственна за основ-

ной максимум пятнообразования. Вместе с тем в приполярных доменах два направленные вниз эффекты магнитного переноса (турбулентный диамагнетизм и магнитный ω -поток) приводят к образованию слоя мощного магнитного поля вблизи дна СКЗ. Заблокированные в этом слое сильные тороидальные поля благодаря направленному к экватору глубинному меридиональному течению переносятся из участков полярных широт к средним, а затем и низким широтам. Если для скорости глубинного меридионального течения у дна СКЗ ($r = 5 \cdot 10^9$ см) взять величину $U_M^{(deep)} = 3 \dots 5$ м/с [28, 38], то характерное время миграции поля от широты $\theta_1^* = 70^\circ$ до широты $\theta_2^* = 15^\circ$ составляет $t_M = r(\theta_1^* - \theta_2^*) / U_M^{(deep)} = 1 \dots 2$ года. В низкоширотных участках эти «опоздавшие» поля транспортируются вверх — второй приток тороидального поля к поверхности. В результате интенсивность пятнообразования, которая к этому времени пошла на спад (поскольку основная часть фрагментов первой волны сильного тороидального поля уже успела выйти на поверхность раньше на более высоких широтах), снова возрастает, так как теперь наступила очередь подъема «запоздалых» полей. На наш взгляд, именно эта «вторая порция» глубинных тороидальных полей, которая благодаря меридиональной циркуляции с опозданием поступает в приэкваториальный домен из полярных участков, а затем выносится на поверхность на низких широтах, вызывает повторный максимум солнечной активности. Разработанный нами сценарий согласуется с предположением М. Копецкого и Г. Куклина [52] о том, что вторичный максимум связан с возрастанием доли мощных долгоживущих групп пятен (имеющих большую площадь) при непрерывном экваториальном дрейфе зоны пятнообразования.

Выводы. Для объяснения наблюдаемого явления двойного максимума цикла пятнообразования мы разработали сценарий перестройки глубинного тороидального поля, включающий генерацию магнитного поля возле дна СКЗ и его последующий вынос из глубоких слоев на поверхность в «королевской зоне». В перестройке принимают участие пять процессов: радиальный ω -эффект, магнитная плавучесть, макроскопический турбулентный диамагнетизм, ротационный ω -эффект и меридиональная циркуляция. Установлено, что перестройка магнетизма в высокоширотных и приэкваториальном доменах СКЗ происходит в различных режимах. Ключевую роль в предложенной схеме играют два прилива глубинных сильных тороидальных полей от нижнего основания СКЗ к поверхности в приэкваториальном домене. В начале очередного цикла глубинное радиальное дифференциальное вращение, действуя на полоидальное поле предыдущего цикла, генерирует возле дна СКЗ сильное тороидальное поле. Благодаря комбинированному действию в приэкваториальном домене магнитной плавучести, турбулентного диамагнетизма и ротационного ω -эффекта тороидальное поле транспортируется к поверхности, где его фрагменты через некоторое время можно наблюдать в виде биполярных групп

пятен на средних широтах «королевской зоны». Эта направленная вверх первая волна тороидальных полей ответственна за основной максимум активности пятнообразования. В то же время в высокоширотных полярных доменах глубинные тороидальные поля в начале цикла оказываются заблокированными около дна СКЗ направленными вниз турбулентным диамагнетизмом и магнитной -накачкой (нейтрализующими магнитное всплывание полей). Только через 1-2 года, когда направленное к экватору глубинное меридиональное течение вытеснит эти поля в низкоширотные участки приэкваториального домена (где есть благоприятные условия для их всплытия, поскольку здесь магнитный -поток направлен вверх), наступает очередь подъема «запоздалых» полей (второй приток тороидальных полей). Прорываясь на поверхность на несколько более низких широтах, вторая порция всплывания задержанных во времени тороидальных полей приводит к повторному максимуму солнечных пятен.

1. *Вайнштейн С. И., Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А.* Турбулентное динамо в астрофизике. — М.: Наука, 1980.—352 с.
2. *Вайнштейн С. И.* Магнитные поля в космосе. — М.: Наука, 1983.—240 с.
3. *Витинский Ю. И., Копецкий М., Куклин Г. В.* Статистика пятнообразовательной деятельности Солнца. — М.: Наука, 1986.—296 с.
4. *Загородний А. Г., Черемных О. К.* Введение в физику плазмы. — Киев: Наук. думка, 2014.—696 с.
5. *Зельдович Я. Б.* Магнитное поле при двумерном движении проводящей жидкости // Журн. эксперим. и теор. физ.—1956.—**31**.—С. 154—156.
6. *Кичатинов Л. Л.* О магнитной гидродинамике средних полей в неоднородной турбулентной среде // Магнит. гидродинамика.—1982.—№ 3.—С. 67—73.
7. *Козак Л. В., Костык Р. И., Черемных О. К.* Два режима турбулентности на Солнце // Кинематика и физика небес. тел.—2013.—**29**, № 2.—С. 22—29.
8. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР.—1941.—**30**, № 4.—С. 299—303.
9. *Криводубский В. Н.* О турбулентной проводимости и магнитной проницаемости солнечной плазмы // Солнеч. данные.—1982.—№ 7.—С. 99—109.
10. *Криводубский В. Н.* Интенсивность источников магнитных полей солнечного -динамо // Астрон. журн.—1984.—**61**.—С. 540—548.
11. *Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К.* Математические модели сплошных сред. — Киев: Наук. думка, 2010.—552 с.
12. *Обридко В. Н.* Магнитные поля и индексы активности // Плазменная гелиогеофизика / Под ред. Л. М. Зеленого, И. С. Веселовского. — М.: Физматлит, 2008.—Т. I.—С. 41—60.
13. *Соловьев А. А., Киричек Е. А.* Диффузная теория солнечного магнитного цикла. — Элиста — Санкт-Петербург: Изд-во Калмыцкого ГУ, 2004.—182 с.
14. *Antalova A., Gnevyshev M. N.* Principal characteristics of the 11-year solar activity cycle // Sov. Astron.—1965.—**9**.—P. 198—201.
15. *Belucz B., Dikpati M., Forgacs-Dajka E.* A Babcock-Leighton solar dynamo model with multi-cellular meridional circulation in advection- and diffusion-dominated regimes // Astrophys. J.—2015.—**806**, N 2.—id. 169.—40 p.

16. *Benevolenskaya E. E.* A model of the double magnetic cycle of the Sun // *Astrophys. Lett.*—2003.—**509**, N 1.—P. L49—L52.
17. *Brandenburg A., Sokoloff D., Subramanian K.* Current status of turbulent dynamo theory from large-scale to small-scale dynamos // *Space Sci. Revs.*—2012.—**169**, N 1 4.—P. 123—157.
18. *Braun D. C., Birc A. C.* Prospects for the detection of the deep solar meridional circulation // *Astrophys. Lett.*—2008.—**689**.—P. L161—L165.
19. *Brun A. S., Browning M. K., Dikpati M., et al.* Recent advances on solar global magnetism and variability // *Space Sci. Revs.*—2015.—**196**, N 1 4.—P. 101—136
20. *Cameron R., Dikpati M., Brandenburg A.* The global solar dynamo // arXiv:1602.01754. 4 Feb 2016.
21. *Cameron R., Schüssler M.* The crucial role of surface magnetic fields for the solar dynamo // *Science.*—2015.—**347**, N 6228.—P. 1333—1335.
22. *Charbonneau P.* Dynamo models of the solar cycle // *Liv. Rev. Solar Phys.*—2010.—**7**, N 3.—P. 1—91.
23. *Choudhuri A. R., Chatterjee P., Jiang J.* Predicting solar cycle 24 with a solar dynamo model // *Phys. Rev. Lett.*—2007.—**98**, N 13.—id. 131103.
24. *Choudhuri A. R., Schussler M., Dikpati M.* The solar dynamo with meridional circulation // *Astron. and Astrophys.*—1995.—**303**.—P. L29.
25. *Dikpati M., Gilman P. A.* Simulating and predicting solar cycles using a flux-transport dynamo // *Astrophys. J.*—2006.—**649**.—P. 498—514.
26. *Drobyshevskij E. M.* Magnetic field transfer by two-dimensional convection and solar “semi-dynamo” // *Astrophys. and Space Sci.*—1977.—**46**.—P. 41—49.
27. *Dudorov A. E., Krivodubskij V. N., Ruzmaikina T. V., Ruzmaikin A. A.* The internal large-scale magnetic field of the Sun // *Sov. Astron.*—1989.—**33**, N 4.—P. 420—426.
28. *Georgieva K.* Why the sunspot cycle is doubly peaked // *ISRN Astron. and Astrophys.*—2011.—id. 437838.—11 p.
29. *Georgieva K., Kirov B.* Solar dynamo and geomagnetic activity // *J. Atmos. and Solar Terr. Phys.*—2011.—**73**, N 2-3.—P. 207—222.
30. *Giles P. M., Duval T. L., Scherrer P. H., Bogart R. S.* A subphotospheric flow of material from the Sun’s equator to its poles // *Nature.*—1997.—**390**.—P. 52—54.
31. *Gizon L., Birch A. C.* Local helioseismology // *Liv. Rev. Solar Phys.*—2005.—**2**, N 6.—P. 1—75.
32. *Gnevyshev M. N.* The corona and the 11-year cycle of solar activity // *Sov. Astron.*—1963.—**7**, N 3.—P. 311—318.
33. *Gnevyshev M. N.* On the 11-years cycle of solar activity // *Solar Phys.*—1967.—**1**.—P. 107—120.
34. *Gnevyshev M. N.* Essential features of the 11-year solar cycle // *Solar Phys.*—1977.—**51**.—P. 175—183.
35. *Hathaway D. H.* Doppler measurements of the Sun’s meridional flow // *Astrophys. J.*—1996.—**460**.—P. 1027—1033.
36. *Hathaway D. H.* Supergranules as probes of the Sun’s meridional circulation // *Astrophys. J.*—2012.—**760**.—P. 83—89.—id. 84.—6 p.
37. *Hathaway D. H.* The solar cycle // *Liv. Rev. Solar Phys.*—2015.—**12**, N 4.—P. 1—87.
38. *Hathaway D. H., Nandy D., Wilson R. M., Reichmann E. J.* Evidence that a deep meridional flow sets the sunspot cycle // *Astrophys. J.*—2003.—**589**.—P. 665—670.
39. *Hazra G., Karak B. B., Choudhuri A. R.* Is a deep one-cell meridional circulation essential for the flux transport solar dynamo? // *Astrophys. J.*—2014.—**782**, N 2.—P. 93 (12 p.).

40. *Howe R.* Solar interior rotation and its variation // *Liv. Revs Solar Phys.*—2009.—**6**, N 1.—P. 1—75.
41. *Howe R., Christensen-Dalsgaard J., Hill F., et al.* Dynamic variations at the base of the solar convection zone // *Science.*—2000.—**287**.—P. 2456—2460.
42. *Ivanova T. S., Ruzmaikin A. A.* A magnetohydrodynamic dynamo model of the solar cycle // *Sov. Astron.*—1976.—**20**.—P. 227—233.
43. *Jackiewicz J., Serebryanskiy A., Kholikov S.* Meridional flow in the solar convection zone. II. helioseismic inversions of GONG DATA // *Astrophys. J.*—2015.—**805**, N 2.—P. 133—141.
44. *Jensen E.* On tubes of magnetic force embedded in stellar material // *Ann. d'Astrophysique.*—1955.—**18**.—P. 127—140.
45. *Jiang J., Cameron R. H., Schüssler M.* The case of the weak solar cycle 24 // *Astrophys. Lett.*—2015.—**808**.—L. 28—35.
46. *Jiang J., Chatterjee P., Choudhuri A. R.* Solar activity forecast with a dynamo model // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2007.—**381**, N 4.—P. 1527—1542.
47. *Kitchatinov L. L.* Turbulent transport of magnetic fields in a highly conducting rotating fluid and the solar cycle // *Astron. and Astrophys.*—1991.—**243**, N 2.—P. 483—491.
48. *Kitchatinov L. L.* The solar dynamo: Inferences from observations and modeling // *Geomagn. and Aeronomy.*—2014.—**54**, N 7.—P. 867—876.
49. *Kitchatinov L. L., Rudiger G.* Magnetic field advection in inhomogeneous turbulence // *Astron. and Astrophys.*—1992.—**260**.—P. 494—498.
50. *Kitiashvili I., Kosovichev A. G.* Application of data assimilation method for predicting solar cycles // *Astrophys. J.*—2008.—**688**.—P. L49—L52.
51. *Komm R. W., Howard R. F., Harvey J. W.* Meridional flow of small photospheric magnetic features // *Solar Phys.*—1993.—**147**.—P. 207—223.
52. *Kopecky M., Kuklin G. V.* A few notes on the sunspot activity in dependence on the phase of the 11-year cycle and on the heliographic latitude // *Bull. Astron. Inst. Czech.*—1969.—**20**.—P. 22—29.
53. *Kosovichev A. G.* Probing solar and stellar interior dynamics and dynamo // *Adv. Space Res.*—2008.—**41**.—P. 830—837.
54. *Kraichnan R. H.* Internal-ranger spectrum of hydromagnetic turbulence // *Phys. Fluids.*—1965.—**8**.—P. 1385—1387.
55. *Krause F., Rädler K.-H.* Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory. — Oxford: Pergamon Press, Ltd., 1980.—271 p.
56. *Krivodubskij V. N.* Magnetic field transfer in the turbulent solar envelope // *Sov. Astron.*—1984.—**28**, N 2.— P. 205—211.
57. *Krivodubskij V. N.* Transfer of the large-scale solar magnetic field by inhomogeneity of the material density in the convective zone // *Sov. Astron. Lett.*—1987.—**13**.— P. 338—341.
58. *Krivodubskij V. N.* Rotational anisotropy and magnetic quenching of gyrotropic turbulence in the solar convective zone // *Astron. Reports.*—1998.—**42**.—P. 122—126.
59. *Krivodubskij V. N.* The structure of the global solar magnetic field excited by the turbulent dynamo mechanism // *Astron. Reports.*—**45**.—2001.—P. 738—745.
60. *Krivodubskij V. N.* Turbulent dynamo near tachocline and reconstruction of azimuthal magnetic field in the solar convection zone // *Astron. Nachr.*—2005.—**326**, N 1.— P. 61—74.
61. *Krivodubskij V. N.* Turbulent effects of sunspot magnetic field reconstruction // *Kinematics and Physics of Celestial Bodies.*—2012.—**28**, N 5.—P. 232—238.

62. *Krivodubskij V. N.* On the extended 23rd solar cycle // Solar and astrophysical dynamos and magnetic activity: Proc. IAU Symp. N 294 / Eds A. G. Kosovichev et al. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013.—P. 69—70.
63. *Krivodubskij V. N., Lozitska N. I.* Dependence of solar cycles duration on the magnitude of the annual module of the sunspots magnetic field // Proc. IAU Symp.—2013.—**294**.—P. 71—72.
64. *Krivodubskij V. N.* Small scale alpha-squared effect in the solar convection zone // Kinematics and Physics of Celestial Bodies.—2015.—**31**, N 2.—P. 55—64.
65. *Kuznetsov V. D., Syrovatskii S. I.* The floating up of magnetic fields and the 11-year cyclicity of solar activity // Sov. Astron.—1979.—**23**.—P. 715—719.
66. *Makarov V. I., Tlatov A. G., Callebaut D. K., et al.* Large-scale magnetic field and sunspot cycles // Solar Phys.—2001.—**198**, N 2.—P. 409—421.
67. *Miesch M. S., Dikpati M.* A three-dimensional Babcock-Leighton solar dynamo model // Astrophys. Lett.—2014.—**785**.—P. L8—L12.
68. *Moreno-Insertis F.* Rise times of horizontal magnetic flux tubes in the convection zone of the Sun // Astron. and Astrophys.—1983.—**122**.—P. 241—250.
69. *Muñoz-Jaramillo A., Dasi-Espuig M., Balmaceda L. A., DeLuca E. E.* Solar cycle propagation, memory, and prediction: insights from a century of magnetic proxies // Astrophys. Lett.—2013.—**767**: L25.—7 p.
70. *Nandy D., Choudhuri A. R.* Explaining the latitudinal distribution of sunspots with deep meridional flow // Science.—2002.—**296**.—P. 1671—1674.
71. *Nandy D., Muñoz-Jaramillo A., Martens P. C. H.* The unusual minimum of sunspot cycle 23 caused by meridional plasma flow variations // Nature.—2011.—**471**, N 7336.—P. 80—82.
72. *Nelson N. J., Brown B. P., Sacha Brun A., et al.* Buoyant magnetic loops generated by global convective dynamo action // Solar Phys.—2014.—**289**, N 2.—P. 441—458.
73. *Nesme-Ribes E., Meunier N., Vince I.* Solar dynamics over cycle 19 using sunspots as tracers // Astron. and Astrophys.—1997.—**321**.—P. 323—329.
74. *Ossendrijver M.* The solar dynamo // Astron. and Astrophys. Rev.—2003.—**11**, N 4.—P. 287—367.
75. *Parker E. N.* The formation of sunspots from the solar toroidal field // Astrophys. J.—1955.—**121**.—P. 491—507.
76. *Pipin V. V., Kosovichev A. G.* The mean-field solar dynamo with a double cell meridional circulation pattern // Astrophys. J.—2013.—**776**.—id. 36.—9 p.
77. *Popova E. P., Potemina K. A., Yukhina N. A.* Double cycle of solar activity in a two-layer medium // Geomagn. and Aeronomy.—2015.—**54**, N 7.—P. 877—881.
78. *Popova E., Zharkova V., Zharkov S.* Probing latitudinal variations of the solar magnetic field in cycles 21—23 by Parker's two-layer dynamo model with meridional circulation // Ann. Geophys.—2013.—**31**.—P. 2023—2028.
79. *Rädler K.-H.* Zur Elektrodynamik turbulent bewegter leitender Medium // Z. Naturforsch. A.—1968.—**23**.—S. 1841—1860.
80. *Rüdiger G., Arlt R.* Physics of solar cycle // Advances in nonlinear dynamos (The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics) / Eds A. Ferris-Mas, M. Núñez. — London, New York: Taylor & Francis, 2004.—P. 147—191.
81. *Schad A., Timmer J., Roth M.* Global helioseismic evidence for a deeply penetrating solar meridional flow consisting of multiple flow cells // Astrophys. Lett.—2013.—**778**, N 2.—P. L38—L44.
82. *Schatten K. H., Scherrer P. H., Svalgaard L., Wilcox J. M.* Using dynamo theory to predict the sunspot number during cycle 21 // Geophys. Res. Lett.—1978.—**5**.—P. 411—414.

83. *Schou J., Antia H. M., Basu S., et al.* Helioseismic studies of differential rotation in the solar envelope by the solar oscillations investigation using the Michelson Doppler Imager // *Astrophys. J.*—1998.—**505**.—P. 390—417.
84. *Schüssler M.* On buoyant magnetic flux tubes in the solar convection zone // *Astron. and Astrophys.*—1977.—**56**.—P. 439—442.
85. *Schwabe H.* Sonnen-Beobachtungen im Jahre 1843 // *Astron. Nachr.*—1844.—**21** (495).—P. 233—236.
86. *Shepherd S. J., Zharkov S. I., Zharkova V. V.* Prediction of solar activity from solar background magnetic field variations in cycles 21—23 // *Astrophys. J.*—2014.—**795**, N 1.—P. 46 (8 p.).
87. *Snodgrass H. B., Dailey S. B.* Meridional motions of magnetic features in the solar photosphere // *Solar Phys.*—1996.—**163**.—P. 21—42.
88. *Stix M.* The Sun: an introduction, second edition. — Berlin: Springer-Verlag, 2002.—490 p.
89. *Svalgaard L., Cliver E. W., Kamide Y.* Sunspot cycle 24: Smallest cycle in 100 years? // *Geophys. Res. Lett.*—2005.—**32**, N 1.—P. L01104.
90. *Tlatov A., Illarionov E., Sokoloff D., Pipin V.* A new dynamo pattern revealed by the tilt angle of bipolar sunspot groups // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2013.—**432**, N 4.—P. 2975—2984.
91. *Unno W., Ribes E.* On magnetic buoyancy in the convection zone // *Astrophys. J.*—1978.—**208**.—P. 222—232.
92. *Wang Y.-M., Sheeley N. R., Nash A. G.* A new solar cycle model including meridional circulation // *Astrophys. J.*—1991.—**383**.—P. 431—442.
93. *Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokoloff D. D.* Magnetic fields in astrophysics. — New York: Gordon and Breach, 1983.
94. *Zhao J., Bogart R. S., Kosovichev A. G., Duvall T. L., Hartlep T.* Detection of equatorward meridional flow and evidence of double-cell meridional circulation inside the Sun // *Astrophys. Lett.*—2013.—**774**, N 2.—P. L29—L34.
95. *Zhao J., Kosovichev A. G.* Torsional oscillation, meridional flows, and vorticity inferred in the upper convection of the Sun by time-distance helioseismology // *Astrophys. J.*—2004.—**603**.—P. 776—784.
96. *Zharkova V. V., Shepherd S. J., Zharkov S. I.* Principal component analysis of background and sunspot magnetic field variations during solar cycles 21—23 // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.*—2012.—**424**, N 4.—P. 2943—2953.
97. *Zharkov S., Gavryuseva E., Zharkova V.* The observed long- and short-term phase relation between the toroidal and poloidal magnetic fields in cycle 23 // *Solar Phys.*—2008.—**248**.—P. 339—358.
98. *Zolotova N. V., Ponyavin D. I.* Impulse-like behavior of the sunspot activity // *Astron. Reports.*—2012.—**56**.—P. 250—255.

Статья поступила в редакцию 05.03.2015