

УДК 523.9-72

Ю. И. ФедоровГлавная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины
03680 Киев, ул. Заболотного 27**Обмен энергией между быстрыми частицами и ударной волной, распространяющейся в космической плазме**

Исследован процесс обмена энергией между заряженными частицами и неоднородностями магнитного поля при наличии ударной волны, распространяющейся в космической среде. На основе решения уравнения переноса космических лучей сделана оценка величины энергии, приобретаемой релятивистскими частицами при взаимодействии с ударной волной, и исследовано пространственное распределение потока энергии космических лучей.

ОБМІН ЕНЕРГІЄЮ МІЖ ШВИДКИМИ ЧАСТИНКАМИ ТА УДАРНОЮ ХВИЛЕЮ, ЯКА РОЗПОВСЮДЖУЄТЬСЯ У КОСМІЧНІЙ ПЛАЗМІ, Федоров Ю. І. — Досліджено процес обміну енергією між зарядженими частинками та неоднорідностями магнітного поля при наявності ударної хвилі, яка розповсюджується у космічному середовищі. На основі розв'язку рівняння переносу космічних променів, зроблено оцінку величини енергії, яку одержують релятивістські частинки при взаємодії з ударною хвилею, та досліджено просторовий розподіл потоку енергії космічних променів.

ENERGY EXCHANGE BETWEEN FAST PARTICLES AND SHOCK WAVE PROPAGATING IN COSMIC PLASMA, by Fedorov Yu. I. — We consider the process of energy exchange between charged particles and magnetic field irregularities in the presence of shock propagating in cosmic medium. Starting from the solution of cosmic ray transport equation, the value of energy obtained by relativistic particles during their interaction with shock wave is estimated and the spatial dependence of cosmic ray energy flux is analyzed.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что ударные волны, распространяющиеся в космической среде, способны ускорять заряженные частицы до высоких энергий [2, 9]. Межпланетные ударные волны и сопровождающие их потоки частиц высокой энергии регулярно наблюдаются на космических аппаратах [9, 21, 26].

Корональные ударные волны, возникающие во время солнечных вспышек, эффективно ускоряют солнечные космические лучи (КЛ) [21, 26]. Ударные волны, сгенерированные вспышками Сверхновых, являются источниками КЛ широкого диапазона энергий [2, 14, 15, 21–24].

В пионерских работах, посвященных ускорению КЛ ударной волной, показано, что в результате многократного пересечения фронта плоской ударной волны формируется степенной спектр ускоренных частиц [5, 10, 11, 13]. Показатель спектра КЛ определяется единственным параметром — коэффициентом сжатия ударной волны. Ускорение частиц сферической ударной волной исследовано в работах [6, 7, 18]. По-видимому, ускорение частиц на ударных волнах, возникающих после вспышек Сверхновых, обеспечивает спектр галактических КЛ вплоть до энергий порядка 10^{15} эВ [14, 16, 21, 22, 24]. Релятивистскими заряженными частицами обусловлено нетепловое рентгеновское и гамма-излучение остатков Сверхновых [12, 16, 17, 25].

Механизм ускорения частиц на фронтах ударных волн (механизм Ферми первого рода) характеризуется высокой эффективностью, так что заметная доля кинетической энергии оболочки Сверхновой передается КЛ [16, 19, 21]. Частицам высокой энергии может быть передано порядка десяти процентов энергии вспышки (за время жизни остатка Сверхновой) [17, 21]. Причем в наиболее благоприятных для эффективного ускорения КЛ случаях величина трансформируемой энергии может составлять даже несколько десятков процентов кинетической энергии оболочки остатка Сверхновой [12, 16]. Процесс ускорения частиц может оказывать существенное влияние на эволюцию остатков Сверхновых, в частности на их гидродинамические и тепловые свойства [12, 16, 21].

Характер обмена энергией между заряженными частицами и неоднородностями магнитного поля, переносимыми движущейся средой, зависит от функции распределения частиц [3, 20]. Если угловое распределение частиц близко к изотропному, то плотность энергии частиц увеличивается со временем, когда концентрация КЛ увеличивается в направлении гидродинамической скорости среды [3, 4, 20]. Целью настоящей работы является исследование процесса обмена энергией между заряженными частицами высокой энергии и флуктуациями магнитного поля, переносимыми потоком плазмы, при наличии ударной волны, распространяющейся в космической среде.

УСТАНОВИВШЕЕСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим распространение частиц высокой энергии при наличии в среде ударной волны в стационарном случае. Функцию распределения быстрых частиц считаем близкой к изотропной, а скорость частиц v предполагаем большой по сравнению со скоростью среды u . Распространение КЛ описывается следующим уравнением переноса [9]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \kappa_i \frac{\partial N}{\partial r_\alpha} + \mathbf{u}_i \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} - \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \operatorname{div} \mathbf{u}_i = Q(x, p, t), \quad (1)$$

где $i = 1, 2$, $N(r, p, t)$ — концентрация частиц с данным значением импульса p ; в правой части уравнения переноса (1) учтен источник частиц $Q(x, p, t)$. Величины u_1 и u_2 представляют собой гидродинамическую скорость среды по разные стороны фронта ударной волны, а рассеивающие свойства среды перед и за ударным фронтом характеризуются коэффициентами диффузии КЛ κ_1 и κ_2 соответственно. На поверхности разрыва должны выполняться

граничные условия для концентрации частиц $N(r, p, t)$ и плотности потока частиц с данным значением импульса [9, 22, 23, 26]

$$\mathbf{J}_i(x, p) = -\kappa_i \frac{\partial N(x, p)}{\partial r} - \frac{u_i p}{3} \frac{\partial N}{\partial p}. \quad (2)$$

Процесс ускорения частиц при наличии в турбулентной среде ударной волны является механизмом ускорения Ферми первого рода и обусловлен многократным пересечением ударного фронта быстрыми заряженными частицами. Многократное пересечение КЛ фронта ударной волны, необходимое для приобретения частицами энергии при взаимодействии со средой, обеспечивается рассеянием частиц на неоднородностях магнитного поля по обе стороны ударного фронта [14, 21, 26].

В дальнейшем фронт ударной волны считаем плоским, а задачу — одномерной. Выберем систему отсчета, в которой фронт ударной волны неподвижен и соответствует координате $x = 0$. В полупространстве $x < 0$ скорость среды равна u_1 , а коэффициент диффузии КЛ — κ_1 . При положительных значениях координаты x соответствующие величины равны u_2 и κ_2 . Значения скорости среды u_1 и u_2 считаем постоянными и положительными, причем $u_1 > u_2$, а коэффициенты диффузии КЛ κ_1 и κ_2 предполагаем не зависящими от пространственной координаты x [14, 21, 26]. Влияние пространственной зависимости рассеивающих свойств среды на процесс ускорения частиц обсуждалось в работах [22, 23], в частности показано [23], что в случае конечной протяженности диффузионных областей вблизи фронта ударной волны происходит увеличение темпа ускорения частиц и смягчение энергетического спектра КЛ.

Следуя работам [14, 22, 23], предположим, что моноэнергетический источник частиц расположен в начале координат:

$$Q(x, p) = Q_0 \delta(x) \frac{\delta(p - p_0)}{p^2}.$$

Величина Q_0 определяет число частиц, испущенных источником в единицу времени. В рассматриваемом стационарном случае уравнение переноса КЛ принимает вид

$$u_i \frac{\partial N}{\partial x} - \kappa_i \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = Q_0 \delta(x) \frac{\delta(p - p_0)}{p^2}, \quad (3)$$

где значение индекса $i = 1$ соответствует полупространству $x < 0$, а $i = 2$ — области $x > 0$. Концентрация частиц $N(x, p)$ должна быть непрерывна на фронте ударной волны (при $x = 0$). Плотность потока частиц с данным значением импульса (2)

$$J_i(x, p) = -\kappa_i \frac{\partial N(x, p)}{\partial x} - \frac{u_i p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \quad (4)$$

испытывает скачок в точке $x = 0$, вследствие наличия источника частиц в уравнении переноса (3)

$$[J] = -Q_0 \frac{\delta(p - p_0)}{p^2}, \quad (5)$$

где $[J] = J_1(0, p) - J_2(0, p)$ — разность значений данной величины с обеих сторон поверхности разрыва [23].

В пространственной области $x < 0$ решение уравнение переноса (3), удовлетворяющее условию непрерывности концентрации частиц и соотношению (5), имеет вид

$$N(x, p) = N(0, p) \exp\left(\frac{u_1}{\kappa_1} x\right), \quad (6)$$

причем концентрация частиц в точке $x = 0$ определена соотношением

$$N(0, p) = \frac{3Q_0}{(\alpha - 1)p_0^3 u_2} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{3\alpha}{\alpha-1}} \Theta(p - p_0), \quad (7)$$

где

$$\alpha = \frac{u_1}{u_2} \quad (8)$$

— степень сжатия среды, $\Theta(x)$ — единичная функция Хевисайда. В полупространстве $x > 0$ концентрация КЛ не зависит от координат:

$$N(x, p) = N(0, p). \quad (9)$$

Из полученных соотношений видно, что спектр ускоренных частиц имеет степенной вид (7), а показатель спектра определяется коэффициентом сжатия среды α (8) [5, 10, 11, 13].

Уравнению переноса КЛ (1) соответствует следующее уравнение для плотности энергии частиц [4]:

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = G(x, t) + \int_0^{\infty} dp p^2 \varepsilon Q(x, p), \quad (10)$$

где плотность энергии КЛ определяется соотношением

$$w(x, t) = \int_0^{\infty} dp p^2 \varepsilon N(x, p, t), \quad (11)$$

а $\varepsilon = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$ — энергия частицы.

Величина

$$q(x, t) = \int_0^{\infty} dp p^2 \varepsilon J(x, p, t) \quad (12)$$

представляет собой поток энергии КЛ. Как видно из соотношения (12), поток энергии заряженных частиц q , равный количеству энергии, выносимому через единичную площадку за единицу времени, обусловлен наличием потока J частиц. В правой части уравнения (10) член

$$G(x, t) = \frac{u}{3} \int_0^{\infty} dp p^3 v \frac{\partial N(x, p, t)}{\partial x}, \quad (13)$$

описывает источник энергии частиц. Он равен количеству энергии, приобретаемой частицами в единице объема в единицу времени при их взаимодействии с магнитными неоднородностями, движущимися со скоростью среды u . В соответствии с уравнением для плотности энергии КЛ (10) плотность энергии частиц w изменяется вследствие потока энергии из данного объема q и обмена энергией между заряженными частицами и движущимися неоднородностями магнитного поля (13). Характер обмена энергией между частицами и магнитными неоднородностями зависит от взаимной ориентации скорости среды и градиента концентрации КЛ [3, 4, 20]. Если концентрация частиц увеличивается в направлении движения среды, то КЛ приобретают энергию при взаимодействии с движущимися флуктуациями магнитного поля. Последнее слагаемое в уравнении (10) обусловлено наличием постоянного источника частиц $Q(x, p)$ в уравнении переноса (1).

В рассматриваемом стационарном случае концентрация КЛ (9) в области положительных значений x не зависит от координат. Следовательно, согласно соотношению (13) источник энергии равен нулю, и передачи энергии частицам не происходит. При отрицательных значениях координаты концентрация частиц (6), (7) увеличивается при увеличении x , следовательно, величина $\partial N/\partial x > 0$ и источник энергии КЛ (13) положителен.

Таким образом, в полупространстве $x < 0$ ансамбль частиц приобретает энергию при взаимодействии с потоком магнитных неоднородностей, движущимся со скоростью u_1 . Отметим, что при отрицательных значениях координаты эффективность передачи энергии частицам экспоненциально убывает при увеличении расстояния до источника частиц, так как источник энергии G (13) пропорционален величине $\exp(u_1 x/\kappa_1)$.

Поток энергии КЛ (12) при $x < 0$ имеет вид

$$q(x) = q_0 \exp\left(\frac{u_1}{\kappa_1} x\right), \quad (14)$$

где

$$q_0 = \frac{u_1}{3} \int_0^\infty dp p^3 v N(0, p) = \frac{\alpha Q_0 c p_0}{\alpha - 1} \int_1^\infty d\xi \frac{\xi^{-\frac{4-\alpha}{\alpha-1}}}{\sqrt{\xi^2 + (mc/p_0)^2}}. \quad (15)$$

При положительных значениях координаты x поток энергии КЛ постоянен:

$$q = q_0 + Q_0 \varepsilon_0. \quad (16)$$

Второе слагаемое в формуле для потока энергии (16) равно энергии Q_0 частиц, испускаемых в единицу времени источником частиц. Величина $\varepsilon_0 = \sqrt{p_0^2 c^2 + m^2 c^4}$ равна начальной энергии инжектированной частицы. Отметим, что поток энергии КЛ (14)—(16) испытывает скачок в точке $x = 0$, что обусловлено наличием источника частиц в уравнении переноса КЛ.

Как видно из соотношений (6), (14), характерным масштабом изменения функции распределения ускоренных частиц является величина

$$L = \frac{\kappa}{u} = \frac{v}{3u} \Lambda,$$

где Λ — транспортный пробег частицы. Для частиц высокой энергии, скорость которых существенно больше скорости ударной волны, величина L значительно превышает Λ [9, 13]. Например, если транспортный пробег релятивистских частиц в солнечном ветре имеет величину 10^{11} — 10^{12} см, то характерный масштаб изменения функции распределения КЛ L оказывается порядка 10^{13} — 10^{14} см. Такое большое значение L накладывает ограничения на применимость данного приближения (согласно которому величины κ_i , u_i не зависят от пространственных координат) для межпланетного пространства. Ударная волна от вспышки Сверхновой распространяется в межзвездной среде значительно быстрее, чем межпланетная ударная волна. Поэтому параметр L превышает транспортный пробег релятивистских частиц в межзвездном магнитном поле всего на порядок.

Для сильной ударной волны степень сжатия среды (8) близка к $\alpha \approx 4$ [21, 22]. Согласно формуле (7) показатель спектра ускоренных частиц также близок к четырем. Отметим, что при таком показателе спектра плотность энергии КЛ (12) расходится [9, 26]. Следовательно, при $\alpha = 4$ данное приближение неприменимо, и распространение КЛ должно описываться нестационарным уравнением переноса. При увеличении степени сжатия среды увеличивается как количество энергии, передаваемое в

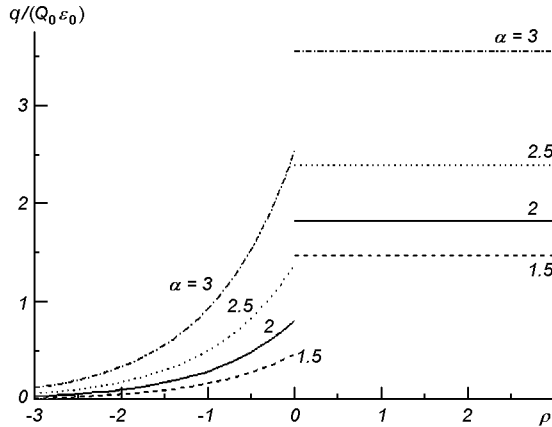


Рис. 1. Зависимость потока энергии быстрых частиц от пространственной координаты

единицу времени частицам (13), так и поток энергии КЛ (14)—(16). Отметим, что при больших значениях потоков энергии частиц, КЛ оказывают существенное обратное влияние на характеристики ударной волны [9, 12, 15, 21, 26].

На рис. 1 приведена зависимость потока энергии КЛ (14)—(16) от безразмерной координаты

$$\rho = \frac{u_1}{\kappa_1} x \tag{17}$$

при различных значениях степени сжатия среды (числа у кривых). Поток энергии КЛ $q(x)$ нормирован на количество энергии, испускаемой источником в единицу времени $Q_0 \epsilon_0$. Начальная кинетическая энергия инжектированных частиц ($\epsilon_{k0} = \epsilon_0 - mc^2$) равна 1 ГэВ. В области $x < 0$ поток энергии КЛ (14) экспоненциально увеличивается при увеличении координаты ρ , а за ударным фронтом ($x > 0$) поток энергии частиц постоянен (рис. 1). На фронте ударной волны ($x = 0$) безразмерный поток энергии КЛ испытывает скачок, равный единице, в соответствии с тем, что энергия, испускаемая в единицу времени источником частиц, составляет величину $Q_0 \epsilon_0$ (рис. 1). Величина потока энергии существенно увеличивается при увеличении степени сжатия среды α (рис. 1), что обусловлено увеличением количества энергии, приобретаемой быстрыми частицами в единицу времени (13).

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Перейдем к изучению процесса ускорения частиц на фронте ударной волны в нестационарном случае. Рассмотрим пространственно-временное распределение концентрации частиц всех энергий:

$$n(x, t) = \int_0^{\infty} dp p^2 N(x, p, t). \tag{18}$$

Уравнение для концентрации $n(x, t)$, соответствующее уравнению переноса КЛ (1), имеет вид

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x, t)}{\partial x} = Q_0 \delta(x), \tag{19}$$

где

$$j(x, t) = \int_0^{\infty} dp p^2 J(x, p, t) \tag{20}$$

— поток частиц всех энергий.

Поток j КЛ всех энергий (20), как и поток частиц с данным значением импульса J (4), можно представить как сумму диффузионной и конвекционной составляющих. Если коэффициенты диффузии κ_i не зависят от энергии частицы, то, подставив соотношение (4) для потока частиц с данным значением импульса в формулу (20), получим

$$j_i(x, t) = -\kappa_i \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} + u_i n. \quad (21)$$

Уравнение переноса КЛ (20), (21) принимает вид

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + u_i \frac{\partial n(x, t)}{\partial x} - \kappa_i \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (22)$$

причем индекс $i = 1$ соответствует отрицательным значениям координаты x , а $i = 2$ — положительным. В точке $x = 0$ должны выполняться следующие граничные условия:

$$[n] = 0; \quad (23)$$

$$[j] = -Q_0. \quad (24)$$

Уравнение (23) соответствует непрерывности концентрации частиц на границе раздела сред, а условие (24) определяет скачок потока КЛ (21), обусловленный наличием источника частиц в начале координат.

Введем безразмерную временную переменную τ согласно соотношению

$$\tau = \frac{u_1^2}{\kappa_1} t. \quad (25)$$

Выполнив преобразование Лапласа

$$n(x, \omega) = \int_0^{\infty} d\tau n(x, \tau) \exp(-\omega\tau), \quad (26)$$

получим уравнение для образа Лапласа концентрации КЛ:

$$\frac{u_1^2}{\kappa_1} \omega n(x, \omega) + u_i \frac{\partial n(x, \omega)}{\partial x} - \kappa_i \frac{\partial^2 n(x, \omega)}{\partial x^2} = 0. \quad (27)$$

Уравнению (24) соответствует следующее соотношение для образа Лапласа потока КЛ:

$$[j(\omega)] = -\frac{Q_0}{\omega}. \quad (28)$$

Таким образом, необходимо найти решение уравнения (27), удовлетворяющее условию (28) и непрерывное в точке $x = 0$. В пространственной области $x < 0$ искомое решение имеет вид

$$n(x, \omega) = n(0, \omega) \exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\omega} \frac{u_1}{\kappa_1}}{2} x\right). \quad (29)$$

В полупространстве $x > 0$ образ Лапласа концентрации частиц задается соотношением

$$n(x, \omega) = n(0, \omega) \exp\left[\left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa_2 u_1^2}{\kappa_1 u_2^2} \omega}\right) \frac{u_2}{2\kappa_2} x\right]. \quad (30)$$

Следуя работам [9, 26], используем условие

$$\frac{u_1^2}{\kappa_1} = \frac{u_2^2}{\kappa_2}, \quad (31)$$

которое существенно упрощает обратное преобразование Лапласа, но не является обязательным. Так, например, в работе [23] получено решение нестационарного уравнения переноса КЛ при наличии ударной волны без использования ограничения (31).

Образ Лапласа концентрации КЛ в точке $x = 0$ находится из уравнения (28) и имеет следующий вид:

$$n(0, \omega) = \frac{2Q_0}{(1 + \alpha)u_2\omega \left(\sqrt{1 + 4\omega} - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)}. \quad (32)$$

При выполнении обратного преобразования Лапласа используем соотношение [1]

$$\frac{\exp(-k\sqrt{\omega})}{a + \sqrt{\omega}} \doteq \frac{\exp[-k^2/(4\tau)]}{\sqrt{\pi\tau}} - a\exp(ak + a^2\tau)\operatorname{erfc}\left(a\sqrt{\tau} + \frac{k}{2\sqrt{\tau}}\right).$$

Исходя из формул (29), (32) для образа Лапласа концентрации частиц, получаем следующее соотношение, справедливое в полупространстве $x < 0$:

$$n(\rho, \tau) = \frac{Q_0}{(\alpha + 1)u_2} \left[2\exp(\rho) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) - \exp(\rho)\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\rho\right) \int_0^\tau d\eta \exp\left(-\frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2}\eta\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{(\alpha - 1)\sqrt{\eta}}{2(\alpha + 1)} - \frac{\rho}{2\sqrt{\eta}}\right) \right], \quad (33)$$

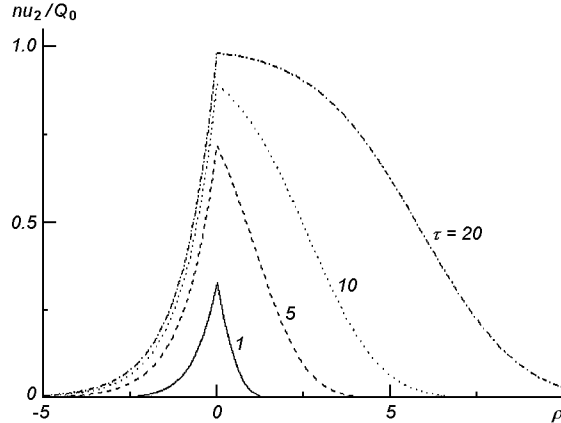
где ρ — безразмерная координата, заданная соотношением (17). Выполнив обратное преобразование Лапласа соотношений (30), (32), получаем формулу для концентрации КЛ при положительных значениях координаты ρ :

$$n(\rho, \tau) = \frac{Q_0}{(\alpha + 1)u_2} \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) - \exp(\alpha\rho)\operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha - 1}{2(\alpha + 1)} \exp\left(\frac{\alpha}{\alpha + 1}\rho\right) \int_0^\tau d\eta \exp\left(-\frac{\alpha}{(\alpha + 1)^2}\eta\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{(\alpha - 1)\sqrt{\eta}}{2(\alpha + 1)} + \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\eta}}\right) \right]. \quad (34)$$

Из соотношения (33) следует, что при больших значениях безразмерного времени τ концентрация частиц экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния до источника частиц в соответствии с выражением для концентрации КЛ в стационарном случае (6). При условии $\tau \gg 1$, $\tau \gg \rho$ концентрация частиц в полупространстве $x > 0$ (34) стремится к постоянному значению, характерному для стационарной задачи.

Пространственная зависимость концентрации частиц в различные моменты времени представлена на рис. 2. По оси ординат приведена безразмерная величина nu_2/Q_0 , которая пропорциональна концентрации КЛ; а коэффициент сжатия среды равен $\alpha = 3$. Пространственное распределение концентрации частиц характеризуется максимумом в точке $x = 0$, который обусловлен наличием постоянного источника частиц в начале координат. При отрицательных значениях координаты концентрация КЛ экспоненциально уменьшается при удалении от источника, причем при значениях $\tau \gtrsim 10$ пространственное распределение частиц мало отличается от стационарного (рис. 2). В области $\rho > 0$ частицы с течением времени занимают все большую область пространства, причем градиент КЛ в центральной области уменьшается (рис. 2).

Рис. 2. Пространственное распределение концентрации космических лучей (32), (34) в различные моменты времени τ



Изменение концентрации частиц (33), (34) со временем определяется безразмерной переменной τ (25). Следовательно, характерное время изменения пространственного распределения КЛ можно представить как

$$t_0 = \frac{\kappa}{u^2} = \frac{L}{u},$$

где L — характерный пространственный масштаб функции распределения частиц. Если принять, что для солнечного ветра величина L составляет $10^{13}—10^{14}$ см, то характерное время процесса оказывается примерно 1—10 сут. При скорости межпланетной ударной волны $u = 10^8$ см/с время ее распространения от Солнца до орбиты Земли составит около двух суток. Исходя из скорости $u = 10^9$ см/с распространения ударной волны от Сверхновой и характерного пространственного масштаба функции распределения галактических КЛ порядка 1 пк, получаем характерное время $t_0 \approx 100$ лет. За указанное время размер остатка Сверхновой успевает существенно увеличиться [5, 22]. Приведенные оценки иллюстрируют нестационарный характер процесса ускорения частиц на фронтах ударных волн, распространяющихся в космическом пространстве.

Рассмотрим пространственно-временное распределение концентрации частиц с заданным значением импульса $N(x, p, t)$ при наличии в космической среде ударной волны. Уравнение для величины $N(x, p, t)$ имеет тот же вид (22), что и уравнение переноса для концентрации частиц всех энергий $n(x, t)$. На фронте ударной волны ($x = 0$) концентрация КЛ N должна быть непрерывна, а поток частиц данного импульса J (4) должен удовлетворять граничному условию (5). Выполнив преобразование Лапласа уравнения переноса КЛ, получим уравнение для образа концентрации частиц $N(x, p, \omega)$, аналогичное уравнению (27). Из условия (5) получаем выражение для образа Лапласа потока частиц с заданным значением импульса

$$[J(\omega)] = -\frac{Q_0 \delta(p - p_0)}{\omega p^2}. \quad (35)$$

Непрерывное в точке $x = 0$ решение уравнения (27) можно представить в виде

$$N(\rho, p, \omega) = N(0, p, \omega) \exp\left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\omega}}{2} \rho\right), \quad \rho < 0, \quad (36)$$

$$N(\rho, p, \omega) = N(0, p, \omega) \exp\left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\omega}}{2} \alpha \rho\right), \quad \rho > 0. \quad (37)$$

При выводе соотношений (36), (37) использовано условие (31). Параметр α характеризует степень сжатия среды (8), а безразмерная координата ρ определена формулой (17). Образ Лапласа концентрации частиц в точке $x = 0$ можно вычислить из условия (35) для потока КЛ:

$$N(0, p, \omega) = \frac{3Q_0}{(\alpha - 1)u_2 p_0^3} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{\exp\left(-3 \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \zeta \sqrt{\omega + 1/4}\right)}{\omega} \Theta(p - p_0), \quad (38)$$

где

$$\zeta = \ln \frac{p}{p_0}. \quad (39)$$

При выполнении обратного преобразования Лапласа используем соотношение [1]

$$\frac{\exp(-\beta\sqrt{\omega + 1/4})}{\omega} \doteq \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\tau}} \frac{d\xi}{\xi^2} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4} - \frac{\beta^2}{4\xi^2}\right).$$

Интеграл, входящий в правую часть этого соотношения, может быть представлен в виде [8]

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{dx}{x^2} \exp\left(-a^2 x^2 - \frac{b^2}{x^2}\right) = \\ & = \frac{\sqrt{\pi}}{4b} [\exp(-2ab)\operatorname{erf}(ax - b/x) - \exp(2ab)\operatorname{erf}(ax + b/x) + 2ch(2ab)]. \end{aligned}$$

Учитывая приведенные формулы при выполнении обратного преобразования Лапласа соотношений (36), (38), получаем следующее выражение для концентрации частиц в полупространстве $x < 0$:

$$\begin{aligned} N(\rho, p, \tau) = & \frac{3Q_0}{2(\alpha - 1)u_2 p_0^3} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{3\alpha}{\alpha - 1}} \exp(\rho) \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)} \zeta + \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(3 \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \zeta - \rho\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)} \zeta - \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \Theta(p - p_0), \quad (40) \end{aligned}$$

где переменная ζ определена соотношением (39). Исходя из формул (37), (38), получаем следующее соотношение, справедливое при положительных значениях ρ :

$$\begin{aligned} N(\rho, p, \tau) = & \frac{3Q_0}{2(\alpha - 1)u_2 p_0^3} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{3\alpha}{\alpha - 1}} \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)} \zeta - \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(3 \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \zeta + \alpha\rho\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)} \zeta + \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \Theta(p - p_0). \quad (41) \end{aligned}$$

При больших значениях безразмерного времени ($\tau \gg 1$, $\tau \gg \rho$) двумя последними слагаемыми в соотношениях (40) и (41) можно пренебречь. В этом случае получим формулы (6)–(9), описывающие стационарное пространственно-энергетическое распределение частиц. Зависимость концентрации частиц с данным значением импульса $N(\rho, p, \tau)$ (40), (41) от координаты ρ имеет максимум в начале координат и подобна пространственной зависимости концентрации частиц всех энергий $n(\rho, \tau)$ (33), (34) (рис. 2). На рис. 3 представлен спектр ускоренных частиц на фронте ударной волны (в точке $x = 0$) в различные моменты времени. Ось ординат

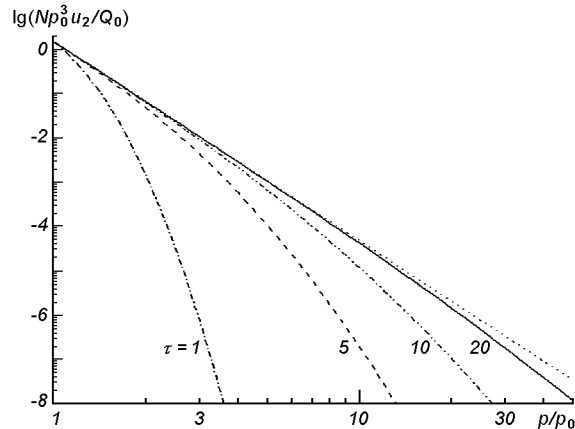


Рис. 3. Спектр ускоренных частиц в точке $x = 0$

соответствует безразмерной величине $p_0^3 u_2 N(0, p, \tau) / Q_0$, которая пропорциональна концентрации частиц с данным значением импульса в точке $x = 0$. Степень сжатия среды равна 3, пунктирная кривая на рис. 3 соответствует стационарному степенному спектру (7). Видно, что со временем энергетический спектр частиц становится более жестким, а показатель спектра уменьшается по абсолютной величине, приближаясь к значению $3\alpha/(\alpha - 1)$, характерному для стационарного случая (рис. 3). Зависимость концентрации КЛ от импульса, в отличие от стационарного случая, не является степенной, причем показатель спектра увеличивается по абсолютной величине с увеличением импульса частицы. Интервал энергий, для которого в данной точке пространства успевает установиться степенной спектр (7), зависит от времени ускорения.

ОБМЕН ЭНЕРГИЕЙ МЕЖДУ ЗАРЯЖЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ И НЕОДНОРОДНОСТЯМИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Полученные соотношения (40), (41) позволяют вычислить источник энергии КЛ (13) и поток энергии частиц (12) в любой точке пространства. Оценим количество энергии, получаемое в единицу времени быстрыми частицами при взаимодействии со средой. Отметим, что источник энергии КЛ (13) пропорционален скорости среды, которая равна u_1 и u_2 при отрицательных и положительных значениях координаты x соответственно. Проинтегрируем величину $G(x, t)$ (13) по x , учитывая, что в фиксированный момент времени концентрация частиц (40), (41) экспоненциально уменьшается с увеличением расстояния до фронта ударной волны:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx G(x, t) = \frac{u_1 - u_2}{3} \int_0^{\infty} dp p^3 v N(0, p, t). \quad (42)$$

Таким образом, в единицу времени частицы получают количество энергии, пропорциональное разности скоростей среды по обе стороны ударного фронта. Если инжекция частиц происходит в турбулентную среду без скачка гидродинамической скорости ($u_1 = u_2$), то передачи энергии движущихся магнитных неоднородностей быстрым частицам не происходит.

Количество энергии, приобретаемой частицами в единицу времени, можно вычислить, подставив концентрацию частиц в точке $x = 0$ (40) в формулу (42):

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) = & \frac{Q_0 p_0 c}{2} \int_0^\infty d\xi \frac{\exp(5\xi)}{\sqrt{\exp(2\xi) + (mc/p_0)^2}} \times \\ & \times \left[\exp\left(\frac{3\xi}{\alpha - 1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{3\xi}{\alpha - 1}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Величина Φ (43) монотонно увеличивается с течением времени, приближаясь к стационарному значению, соответствующему величине плотности КЛ (7). Количество приобретаемой частицами энергии (43) пропорционально числу частиц, испущенных источником в единицу времени Q_0 , импульсу инжектированных частиц p_0 и зависит от степени сжатия среды α . Заметим, что величина Φ (43) увеличивается при увеличении параметра α . В предельном случае сильной ударной волны ($\alpha = 4$) количество энергии, приобретаемой быстрыми частицами в единицу времени (43), при больших значениях τ увеличивается со временем по линейному закону.

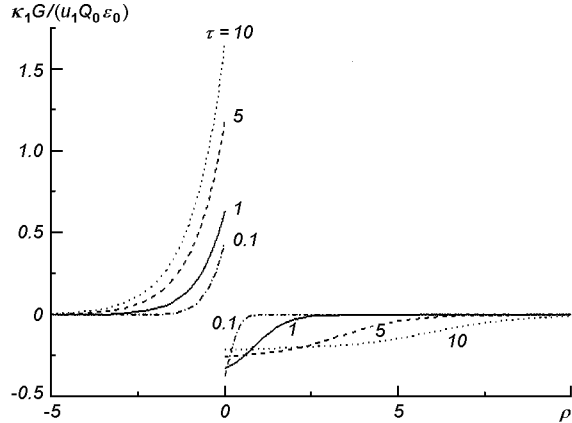
Источник энергии КЛ (13) пропорционален градиенту концентрации частиц. В области $x < 0$ концентрация частиц увеличивается при увеличении x , а в полупространстве $x > 0$ концентрация КЛ монотонно уменьшается при удалении от источника частиц (рис. 2). Источник энергии КЛ (13) положителен при отрицательных значениях координаты. Следовательно, в пространственной области $x < 0$ частицы приобретают энергию при рассеянии на движущихся флуктуациях магнитного поля. Величина $G(x, t)$ (13) отрицательна в области $x > 0$, т. е. при положительных значениях x частицы передают энергию среде. Выражение для источника энергии КЛ в области отрицательных значений координаты получим, подставив соотношение для концентрации частиц (40) в формулу (13):

$$\begin{aligned} G(\rho, \tau) = & \frac{\alpha u_1 Q_0 p_0 c \exp(\rho)}{2(\alpha - 1)\kappa_1} \int_0^\infty d\xi \frac{\exp\left(\frac{2\alpha - 5}{\alpha - 1}\xi\right)}{\sqrt{\exp(2\xi) + (mc/p_0)^2}} \times \\ & \times \left\{ 2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} + \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} + \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right] \right\}. \end{aligned} \quad (44)$$

В полупространстве $x > 0$ источник энергии частиц (13), (41) имеет вид

$$\begin{aligned} G(\rho, \tau) = & \frac{\alpha u_1 Q_0 p_0 c}{2(\alpha - 1)\kappa_1} \int_0^\infty d\xi \frac{\exp\left(\frac{2\alpha - 5}{\alpha - 1}\xi\right)}{\sqrt{\exp(2\xi) + (mc/p_0)^2}} \times \\ & \times \left\{ \exp\left(3\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}\xi + \alpha\rho\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} + \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} + \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right] \right\}. \end{aligned} \quad (45)$$

Рис. 4. Зависимость источника энергии космических лучей от пространственной координаты ρ в различные моменты времени τ



На рис. 4 представлена зависимость безразмерной величины $\kappa_1 G(\rho, \tau)/(u_1 Q_0 \varepsilon_0)$ от координаты ρ в различные моменты времени. Данная величина пропорциональна отношению энергии КЛ, приобретаемой частицами в единице объема в единицу времени G (44), (45), к энергии частиц, инжектированных в единицу времени источником $Q_0 \varepsilon_0$. Начальная кинетическая энергия частиц равна 1 ГэВ, а коэффициент сжатия среды $\alpha = 3$. Видно, что в пространственной области $x < 0$ быстрые частицы приобретают энергию, а при положительных значениях координаты КЛ отдают энергию среде. Разность приобретенной при $x < 0$ частицами энергии и переданной магнитным неоднородностям в полупространстве $x > 0$ равна полному количеству энергии, полученной частицами при взаимодействии с ударной волной (43). С течением времени область, в которой частицы эффективно взаимодействуют со средой, увеличивается (рис. 4). Причем, если частицы приобретают энергию в ограниченной области, размер которой составляет несколько характерных масштабов $L = \kappa_1/u_1$, то пространственная область, в которой КЛ отдают энергию среде, неограниченно увеличивается со временем (рис. 4).

Перейдем к вычислению потока энергии КЛ (4), (12). Исходя из соотношения (40) для концентрации частиц в пространственной области $x < 0$, получим следующее соотношение для потока энергии КЛ:

$$\begin{aligned}
 q(\rho, \tau) = & \frac{\alpha Q_0 p_0 c}{2(\alpha - 1)} \left\{ 3 \int_0^\infty d\xi \exp\left(-\frac{3\xi}{\alpha - 1}\right) \sqrt{\exp(2\xi) + (mc/p_0)^2} \times \right. \\
 & \times \left[\exp\left(3 \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \xi\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2\exp(\rho)}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right) \right] + \right. \\
 & + \exp(\rho) \int_0^\infty d\xi \frac{\exp\left(\frac{2\alpha - 5}{\alpha - 1} \xi\right)}{\sqrt{\exp(2\xi) + (mc/p_0)^2}} \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\
 & \left. \left. + \exp\left(3 \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \xi - \rho\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)\xi}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \right\}. \quad (46)
 \end{aligned}$$

При больших значениях безразмерного времени, когда первым интегралом в соотношении (46) можно пренебречь, а в подынтегральном выражении второго интеграла основную роль играет первое слагаемое, приходим к соотношениям для потока энергии быстрых частиц в стационарном случае (14), (15). Отметим, что установившееся значение потока энергии КЛ при $x < 0$ (14) экспоненциально уменьшается при удалении от источника частиц.

При положительных значениях пространственной координаты, когда концентрация КЛ описывается соотношением (41), поток энергии частиц имеет вид

$$\begin{aligned}
 q(\rho, \tau) = & \frac{Q_0 p_0 c}{2(\alpha - 1)} \left\{ 3 \int_0^\infty d\zeta \exp\left(-\frac{3\zeta}{\alpha - 1}\right) \sqrt{\exp(2\zeta) + (mc/p_0)^2} \times \right. \\
 & \times \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)\zeta}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}} \exp\left(-\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)\zeta}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right)^2\right) \right] \right\} + \\
 & + \int_0^\infty d\zeta \frac{\exp\left(\frac{2\alpha - 5}{\alpha - 1}\zeta\right)}{\sqrt{\exp(2\zeta) + (mc/p_0)^2}} \left[2 - \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} - \frac{3(\alpha + 1)\zeta}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} - \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) + \right. \\
 & \left. + \exp\left(3\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}\zeta + \alpha\rho\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2} + \frac{3(\alpha + 1)\zeta}{2(\alpha - 1)\sqrt{\tau}} + \frac{\alpha\rho}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] \Bigg\}. \quad (47)
 \end{aligned}$$

Для больших значений τ ($\tau \gg 1, \tau \gg \rho$) поток энергии КЛ (47) стремится к постоянному значению, характерному для стационарного случая.

Зависимость потока энергии частиц (46), (47) от безразмерной координаты ρ в различные моменты времени τ приведена на рис. 5. Ось ординат соответствует безразмерной величине $q/(Q_0 \varepsilon_0)$, равной отношению потока энергии КЛ в данной точке пространства к энергии, испускаемой источником частиц в единицу времени. Степень сжатия среды принята равной трем, а кинетическая энергия инжектированных частиц $\varepsilon_{k0} = 1$ ГэВ. В начальный период времени (кривые $\tau = 0.1$ и $\tau = 1$ на рис. 5) поток энергии КЛ в полупространстве $x < 0$ отрицателен. Следовательно, энергия КЛ распространяется в направлении от источника частиц. При больших значениях τ

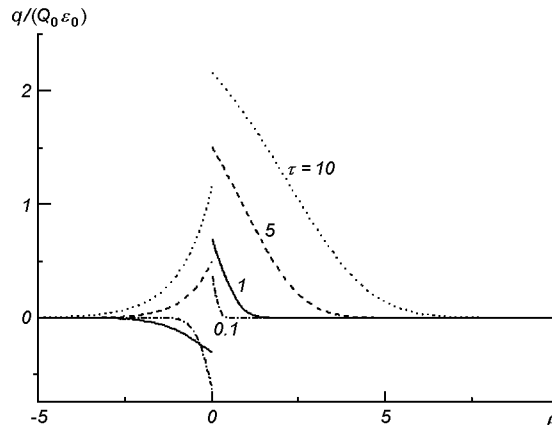
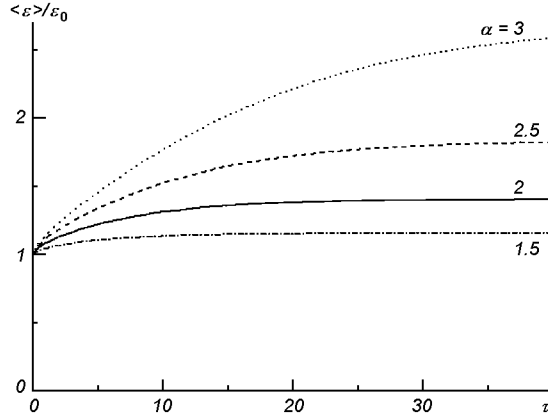


Рис. 5. Пространственное распределение потока энергии космических лучей

Рис. 6. Зависимость от времени средней энергии частиц в точке $x = 0$ при различных значениях степени сжатия среды



($\tau = 5$ и $\tau = 10$ на рис. 5) поток энергии КЛ положителен во всем пространстве, так что энергия КЛ переносится в направлении движения среды. Скачок величины q в точке $\rho = 0$ обусловлен наличием источника быстрых частиц в начале координат. Отметим, что поток энергии КЛ в фиксированной точке пространства монотонно увеличивается со временем (рис. 5).

Рассмотрим, как изменяется со временем средняя энергия частицы в данной точке пространства. Плотность энергии КЛ $w(x, t)$ (11) можно вычислить, зная концентрацию частиц с данным значением импульса (40), (41). Средняя энергия частицы в точке x определяется соотношением

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{w(x, t)}{n(x, t)}, \quad (48)$$

где $n(x, t)$ — концентрация частиц всех энергий (18). В точке $x = 0$ величина $\langle \varepsilon \rangle$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle = & \frac{3(\alpha + 1)}{4(\alpha - 1)} Q_0 p_0 c \int_0^\infty d\xi \sqrt{1 + (mc/p_0)^2 \exp(-2\xi)} \times \\ & \times \left[\exp\left(\frac{4\alpha - 1}{\alpha - 1} \xi\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{3(\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} + \frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) + \right. \\ & \left. + \exp\left(-\frac{4 - \alpha}{\alpha - 1} \xi\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{3(\alpha + 1)}{2(\alpha - 1)} \frac{\xi}{\sqrt{\tau}} - \frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) \right] \times \\ & \times \left[\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right) + \frac{\alpha - 1}{4(\alpha + 1)} \int_0^\tau d\eta \exp\left(-\frac{\alpha\eta}{(\alpha + 1)^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1 - \alpha}{2(1 + \alpha)} \sqrt{\eta}\right) \right]^{-1}. \quad (49) \end{aligned}$$

На рис. 6 представлена зависимость от времени средней энергии (49), нормированной на энергию частиц испускаемых источником ε_0 , при различных значениях степени сжатия среды α . Начальная кинетическая энергия частиц равна 1 ГэВ. Видно, что средняя энергия частиц в единице объема монотонно увеличивается со временем, изменяясь от ε_0 (при малых значениях безразмерного времени) до величины, которая зависит от степени сжатия среды и определяется решением стационарного уравнения переноса (7) (рис. 6). Такая временная зависимость средней энергии КЛ обусловлена ускорением частиц при их взаимодействии с ударной волной и согласуется

с эволюцией энергетического спектра частиц, представленной на рис. 3. Действительно, спектр частиц в данной точке пространства с течением времени становится более жестким (рис. 3), что соответствует увеличению средней энергии частиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученное решение уравнения переноса КЛ позволило оценить энергию, приобретаемую ансамблем частиц высокой энергии при взаимодействии с ударной волной. Рассеиваясь на неоднородностях магнитного поля, быстрые частицы осуществляют перенос энергии, приобретая энергию в одной области пространства и передавая ее движущейся среде — в другой. Поток энергии КЛ определяется энергией инжектированных частиц и степенью сжатия среды.

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979.—832 с.
2. *Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л. и др.* Астрофизика космических лучей. — М.: Наука, 1984.—360 с.
3. *Дорман Л. И., Кац М. Е., Федоров Ю. И., Шахов Б. А.* О балансе энергии космических лучей при многократном рассеянии в случайно-неоднородном магнитном поле // Письма в Журн. эксперим. и теор. физ.—1978.—27, № 6.—С. 374—378.
4. *Дорман Л. И., Кац М. Е., Федоров Ю. И., Шахов Б. А.* О балансе энергии заряженных частиц при многократном рассеянии в случайно неоднородном магнитном поле // Журн. эксперим. и теор. физ.—1980.—79, № 4.—С. 1267—1281.
5. *Крымский Г. Ф.* Регулярный механизм ускорения заряженных частиц на фронте ударной волны // Докл. АН СССР.—1977.—234, № 6.—С. 1306—1309.
6. *Крымский Г. Ф., Петухов С. И.* Ускорение частиц регулярным механизмом в присутствии сферической ударной волны // Письма в Астрон. журн.—1980.—6, № 4.—С. 227—231.
7. *Прищеп В. Л., Птускин В. С.* Об ускорении быстрых частиц на фронте сферической ударной волны // Астрон. журн.—1981.—58, № 4.—С. 779—789.
8. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. — М.: Наука, 1981.—800 с.
9. *Топтыгин И. Н.* Космические лучи в межпланетных магнитных полях. — М.: Наука, 1983.—302 с.
10. *Axford W. I., Leer E., Scadron G.* The acceleration of cosmic rays by shock waves // Proc. 15-th Intern. Cosmic Ray Conf. - Plovdiv, 1977.—11.—P. 132—137.
11. *Bell A. R.* The acceleration of cosmic rays in shock fronts // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—1978.—182, N 1.—P. 147—156.
12. *Berezhko E. G., Ksenofontov L. T., Voelk H. J.* Emission of SN 1006 produced by accelerated cosmic rays // Astron. and Astrophys.—2002.—395, N 3.—P. 943—953.
13. *Blandford R. D., Ostriker J. P.* Particle acceleration by astrophysical shocks // Astrophys. J.—1978.—221, N 1.—P. L29—L32.
14. *Drury L.O'C.* An introduction to the theory of diffusive shock acceleration of energetic particles in tenuous plasmas // Rep. Progress Phys.—1983.—46, N 8.—P. 973—1027.
15. *Ellison D. C., Berezhko E. G., Baring M. G.* Nonlinear shock acceleration and photon emission in supernova remnants // Astrophys. J.—2000.—540, N 1.—P. 292—307.
16. *Ellison D. C., Decourchelle A., Ballet J.* Hydrodynamic simulation of supernova remnants including efficient particle acceleration // Astron. and Astrophys.—2004.—413, N 1.—P. 189—201.
17. *Erlykin A. D., Wolfendale A. W.* High-energy cosmic gamma rays from the «single source» // J. Phys. G.—2003.—29, N 4.—P. 709—718.
18. *Florinski V., Jokipii J. R.* Cosmic ray spectra at spherical termination shocks // Astrophys. J.—2003.—591, N 1.—P. 454—460.
19. *Giacalone J., Jokipii J. R.* Injection and acceleration at non-parallel shocks // Proc. 29-th Intern. Cosmic Ray Conf. — Pune, 2005—usa-jokipii-JR-abs1-og14.
20. *Gleeson L. G., Webb G. M.* Energy changes of cosmic rays in interplanetary region // Astrophys. Space Sci.—1978.—58, N 1.—P. 21—39.
21. *Jones F. C., Ellison D. C.* The plasma physics of shock acceleration // Space Sci. Rev.—1991.—58, N 3.—P. 259—346.
22. *Lagage P. O., Cesarsky C. J.* The maximum energy of cosmic rays accelerated by supernova shocks // Astron. and Astrophys.—1983.—125, N 2.—P. 249—257.

23. *Ostrowski M., Shlickeiser R.* Cosmic-ray diffusive acceleration at shock waves with finite upstream and downstream escape boundaries // *Solar Phys.*—1996.—**167**, N 2.—P. 381—394.
24. *Ptuskin V. S., Zirakashvili V. N.* Limits on diffusive shock acceleration in supernova remnants in the presence of cosmic-ray streaming instability and wave dissipation // *Astron. and Astrophys.*—2003.—**403**, N 1.—P. 1—10.
25. *Thorsett R. A., Benjamin R. A., Brisken W. F., et al.* Pulsar PSR B0656+14, the Monogem Ring, and the origin of the «knee» in the primary cosmic-ray spectrum // *Astrophys. J.*—2003.—**592**, N 2.—P. L71—L73.
26. *Toptygin I. N.* Acceleration of particles by shocks in a cosmic plasma // *Space Sci. Rev.*—1980.—**26**, N 1.—P. 157—213.

Поступила в редакцию 27.04.06