

УДК 523.165

**Б. А. Шахов, Ю. Л. Колесник**

Главная астрономическая обсерватория Национальной академии наук Украины  
03680, Киев ГСП, ул. Академика Заболотного 27

### **Итерационный метод решения краевых задач теории распространения космических лучей**

*Предлагается итерационный метод решения задач распространения космических лучей (КЛ) в гелиосфере. Метод основан на малости степени анизотропии КЛ. В качестве нулевого приближения используется плотность КЛ, удовлетворяющая условию равенства нулю потока КЛ в гелиосфере. Дальнейшие итерации строятся на основе уравнения распространения КЛ в канонической форме. Сравнение показало, что значения плотности КЛ, полученные итерационным методом, почти не отличаются от точных аналитических решений. Получен также другой вид решения краевой задачи распространения КЛ для стационарного сферически-симметричного случая.*

*ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОШИРЕННЯ КОСМІЧНИХ ПРОМЕНІВ, Шахов Б. О., Колесник Ю. Л. — Пропонується ітераційний метод розв'язування задач поширення космічних променів (КП) у геліосфері. Метод базується на малих ступенях анізотропії КП. Як нульове наближення використовується густина КП, що задовольняє умову рівності нулеві потоку КП у геліосфері. Подальші ітерації будуються на основі рівняння поширення КП у канонічній формі. Порівняння показало, що значення густини КП отримані ітераційним методом майже не відрізняються від точних аналітичних розв'язків, відповідно. Отримано також інший вигляд розв'язку граничної задачі поширення КП у стаціонарному сферично-симетричному випадку.*

*ITERATION METHOD FOR SOLUTION OF COSMIC RAY PROPAGATION THEORY BOUNDARY PROBLEMS, by Shakhov B. A., Kolesnik Yu. L. — An iteration method for the solution of the problems of cosmic ray (CR) propagation in heliosphere is proposed. The method is based on the smallness of the anisotropy degree of cosmic rays. As zeroth approximation, CR density satisfying the equality of CR stream in heliosphere to zero is used. The next iterations are built based on CR propagation equation written in canonic form. The CR density calculated for a problem accepting the exact analytical solution are compared with one obtained by the iteration method. The another form of CR propagation boundary problem for the stationary spherical-symmetrical case is derived.*

Возможность получения точного аналитического решения задач распространения галактических космических лучей всегда привлекала внимание исс-

ледователей [10]. На этом пути достигнуты существенные результаты при решении краевых задач для диффузионно-конвекционного уравнения, описывающего распределение космических лучей в гелиосфере, при получении функций Грина этого уравнения в стационарном случае. Так, при задании на границе гелиосферы степенного спектра от модуля импульса и постоянного коэффициента диффузии КЛ и скорости солнечного ветра были получены точные аналитические решения краевых задач [2, 3]. Тем не менее, в случае постоянной по величине и радиально (от Солнца) направленной скорости солнечного ветра точное решение стационарной краевой задачи при произвольном граничном условии можно получить только для коэффициента диффузии, пропорционального некоторой степени расстояния до Солнца и не зависящего от энергии (модуля импульса) [5, 7, 11]. Для получения стационарных функций Грина такого рода уравнения могут быть решены для коэффициента диффузии, заданного в виде произведения произвольной функции от модуля импульса на степень от расстояния до Солнца [6]. Решение нестационарной краевой задачи возможно при специальном выборе граничного условия, энергетического множителя в плотности космических лучей и не зависящего ни от каких переменных коэффициента диффузии [9].

С другой стороны, для астрофизики большой интерес представляют задачи с произвольным коэффициентом диффузии, в том числе зависящим и от времени (для моделирования эффектов, связанных с солнечной активностью). В пользу этого обстоятельства говорит тот факт, что в международных конференциях по КЛ всегда есть тематика, связанная с описанием распространения КЛ в гелиосфере, часто используется численный подход. Получить при этом точное аналитическое решение заведомо невозможно. Поэтому необходимо построить приближенный метод решения, который давал бы приемлемую точность при минимуме интеллектуальных затрат.

Известно [4], что при исследовании многих процессов распространения галактических космических лучей в гелиосфере степень их анизотропии остается малой величиной. Только начальная стадия распространения солнечных космических лучей и комплекс явлений, связанный с воздействием межпланетных ударных волн на галактические космические лучи (ГКЛ), характеризуются высокой степенью анизотропии.

В качестве нулевого приближения используем распределение ГКЛ при нулевой анизотропии в гелиосфере. Это значит, что для сферически-симметричного солнечного ветра во всем его объеме радиальный поток ГКЛ равен нулю. Рассмотрим основное уравнение, описывающее распространение ГКЛ в виде уравнения непрерывности в фазовом пространстве [8]:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} + \text{div}_p j_p = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\mathbf{j} = -\kappa(\mathbf{r}, p, t) \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{u} p}{3} \frac{\partial N}{\partial p}$$

— поток ГКЛ,

$$j_p = \frac{\mathbf{u} p}{3} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}}$$

— поток ГКЛ в пространстве импульсов,  $N(\mathbf{r}, p, t)$  — фазовая плотность ГКЛ, связанная с концентрацией частиц всех энергий соотношением

$$n(\mathbf{r}, t) = \int p^2 N(\mathbf{r}, p, t) dp,$$

$\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки наблюдения с началом на Солнце,  $t$  — время,  $p$  — модуль импульса частицы, связанный с полной энергией частицы известным релятивистским соотношением  $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$  (где  $m_0$  — масса покоя частицы),  $\kappa(\mathbf{r}, p, t)$  — коэффициент диффузии ГКЛ,  $\mathbf{u}$  — скорость солнечного ветра,

$$\operatorname{div}_p = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2.$$

К уравнению (1) нужно присоединить соответствующие граничные и начальные условия.

Решение уравнения (1) будем искать в виде  $N = N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_n$ , где  $N_0$  — решение уравнения

$$\mathbf{j}_0 = -\kappa(\mathbf{r}, p, t) \frac{\partial N_0}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\mathbf{u} p}{3} \frac{\partial N_0}{\partial p} = \mathbf{0},$$

$N_1$  — решение уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_1 = -\frac{\partial N_0}{\partial t} - \operatorname{div}_p (\mathbf{j}_p)_0,$$

а общий член итерационного ряда имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_n = -\frac{\partial N_{n-1}}{\partial t} - \operatorname{div}_p (\mathbf{j}_p)_{n-1}.$$

Проверим теперь точность работы предлагаемого метода на примере стационарной краевой задачи модуляции ГКЛ солнечным ветром, ограниченной сферой радиуса  $r_0$ , сферически-симметричным с постоянной и радиально направленной скоростью, и постоянным коэффициентом диффузии ГКЛ  $\kappa = \text{const}$  [5, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \kappa \frac{\partial N}{\partial r} - u \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{2}{3r} u p \frac{\partial N}{\partial p} &= 0, \\ N(r_0, p) &= N_b(p), \quad N(0, p) < \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $N_b(p)$  — заданный на границе спектр ГКЛ. Эта задача имеет известное аналитическое решение [8]:

$$N(x, \eta) = N_b(\eta) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(-\lambda_n, 2; \mu x)}{\lambda_n F'_a(-\lambda_n, 2; \mu)} \eta^{(3/2)\lambda_n} \int_{\eta}^{\infty} \xi^{-(3/2)\lambda_n} \frac{\partial N_b}{\partial \xi} d\xi, \quad (3)$$

где  $\mu = ur_0/\kappa$ ,  $x = r/r_0$ ,  $\eta = p/(m_0 c)$ ,  $N_b(\eta) = N(1, \eta)$ ,  $F(a, b; x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция [1]  $\lambda_n$  — корни уравнения  $F(a, 2; \mu) = 0$  при  $\mu = \text{const}$ ,  $F'_a$  — производная вырожденной гипергеометрической функции по первому аргументу. Преимуществом решения краевой задачи в виде (3) является возможность использовать в качестве граничного условия спектры в виде кусочно-непрерывных функций. Недостаток состоит в том, что в зависимости от конкретного  $\mu$  необходимо каждый раз решать трансцендентное уравнение и находить наборы собственных значений  $\lambda_n$  и собственных функций  $F(-\lambda_n, 2; \mu x)$ . Если функции, представляющие форму граничного спектра, выбирать только из класса дифференцируемых, то можно получить другую форму решения краевой задачи модуляции:

$$N(x, \eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \eta^m \frac{\partial^m N_b}{\partial \eta^m} \sum_{l=0}^m (-1)^l C_m^l \frac{F\left(-\frac{2}{3}l, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{2}{3}l, 2; \mu\right)}.$$

Это выражение можно получить, интегрируя по частям бесконечное число раз интеграл в выражении (3) и используя выражения

$$\frac{1}{\lambda_n \left(-\frac{3}{2}\lambda_n + 1\right) \left(-\frac{3}{2}\lambda_n + 2\right) \dots \left(-\frac{3}{2}\lambda_n + m\right)} = \frac{1}{m!} \sum_{l=0}^m C_m^l (-1)^l \frac{1}{\lambda_n - \frac{2}{3}l},$$

$$\frac{F(a, 2; x)}{F(a, 2; x_0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F(-\lambda_n, 2; x)}{(a + \lambda_n) F'_a(-\lambda_n, 2; x_0)}.$$

Второе выражение впервые получено в работе [8]. Удерживая первые три члена разложения, получим:

$$N(x, \eta) \approx N_0(\eta) - \eta \frac{\partial N_b}{\partial \eta} \left[ 1 - \frac{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu\right)} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2!} \eta^2 \frac{\partial^2 N_b}{\partial \eta^2} \left[ 1 - \frac{2F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu\right)} + \frac{F\left(-\frac{4}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{4}{3}, 2; \mu\right)} \right] + \dots \quad (4)$$

Найдем теперь нулевое приближение итерационного метода  $N_0(x, \eta)$ . Эта величина является решением уравнения в частных производных первого порядка

$$-\kappa \frac{\partial N_0}{r_0 \partial x} - \frac{u}{3} \eta \frac{\partial N_0}{\partial \eta} = -\frac{\kappa}{r_0} \left( \frac{\partial N_0}{\partial x} + \frac{\mu \eta}{3} \frac{\partial N_0}{\partial \eta} \right) = 0$$

при граничном условии  $N_0(1, \eta) = N_b(\eta)$ . Его решение имеет вид

$$N_0(x, \eta) = N_b \left\{ \eta \exp \left[ \frac{(1-x)\mu}{3} \right] \right\}.$$

Общепринятым спектром на границе области модуляции ГКЛ является спектр, заданный в виде степенной функции по полной энергии вида  $E^{-\gamma}$ , где показатель  $\gamma \approx 2.5 \dots 2.7$  [7]. При больших и малых энергиях он аппроксимируется степенными спектрами от модуля импульса с показателями  $\gamma + 2$  для больших энергий и 1 для малых. В случае больших энергий решение задачи модуляции имеет вид [2]

$$N(x, \eta \rightarrow \infty) = \eta^{-(\gamma+2)} \frac{F\left(\frac{2}{3}(\gamma+2), 2; \mu x\right)}{F\left(\frac{2}{3}(\gamma+2), 2; \mu\right)}. \quad (5)$$

Для малых энергий ГКЛ решение задачи модуляции имеет вид [8]

$$N(x, \eta \rightarrow 0) = \eta^{-1} \frac{F\left(\frac{2}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(\frac{2}{3}, 2; \mu\right)}. \quad (6)$$

Соответствующие  $N_0(x, \eta)$  равны

$$N_0(x, \eta \rightarrow \infty) = N_{0H}(x, \eta) = \eta^{-(\gamma+2)} \exp\left[(\gamma+2) \frac{\mu(x-1)}{3}\right],$$

$$N_0(x, \eta \rightarrow 0) = N_{0L}(x, \eta) = \eta^{-1} \exp\left[\frac{\mu(x-1)}{3}\right].$$

Найдем теперь первое приближение для этих предельных случаев:

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{r_0 \partial x} x^2 j_{1H} = - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^{3-\gamma-2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu}{9r_0} \exp\left[\frac{\mu(\gamma+2)(x-1)}{3}\right],$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{\partial}{r_0 \partial x} x^2 j_{1L} = - \frac{1}{\eta^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mu}{9r_0} \exp\left[\frac{\mu(x-1)}{3}\right].$$

В силу сферической симметрии задачи поток в центре должен равняться нулю. Тогда добавки к потоку выглядят так:

$$j_{1H} = \frac{\mu(\gamma+2)(\gamma-1)}{9} \eta^{-(\gamma+2)} \frac{1}{x^2} \int_0^x \xi^2 \left[ \exp\left(\frac{\mu(\gamma+2)(\xi-1)}{3}\right) \right] d\xi,$$

$$j_{1L} = - \frac{2\mu}{9} \eta^{-1} \frac{1}{x^2} \int_0^x \xi^2 \left[ \exp\left(\frac{\mu(\xi-1)}{3}\right) \right] d\xi. \quad (7)$$

Поправка к плотности  $N_1(x, \eta)$  удовлетворяет соотношению

$$- \left( \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\mu \eta}{3} \frac{\partial N_1}{\partial \eta} \right) = f(x, \eta), \quad (8)$$

где  $f(x, \eta)$  равна величине  $\mu$ , умноженной на правую часть выражений (7) с предварительно взятыми интегралами.

Поскольку граничное условие удовлетворяется нулевым приближением, все последующие приближения плотности на границе солнечного ветра должны равняться нулю. При этих условиях решение неоднородного уравнения первого порядка с частными производными (8) имеет следующий вид:

$$N_1(x, \eta) = \int_x^1 f(\xi, \eta \cdot \exp(-\mu(x-\xi)/3)) d\xi.$$

Выполнив все выкладки, получим

$$N_{1H}(x, \eta) = \eta^{-(\gamma+2)} \frac{\gamma-1}{3} \exp\left[\frac{\mu(\gamma+2)(x-1)}{3}\right] \times$$

$$\times \left\{ \mu(1-x) - \frac{6}{\gamma+2} \ln \frac{1}{x} - \frac{18}{(\gamma+2)^2 \mu} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{18}{(\gamma+2)^2 \mu} \int_x^1 \frac{1}{\xi^2} \exp\left[-\frac{\mu(\gamma+2)\xi}{3}\right] d\xi \right\}, \quad (9)$$

$$N_{1L}(x, \eta) = - \eta^{-1} \frac{2}{3} \exp\left[\frac{\mu(x-1)}{3}\right] \times$$

$$\times \left\{ \mu(1-x) - 6 \ln \frac{1}{x} - \frac{18}{\mu} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{18}{\mu} \int_x^1 \frac{1}{\xi^2} \exp\left(-\frac{\mu\xi}{3}\right) d\xi \right\}.$$

Интеграл в выражениях (9) может быть выражен через интегральную показательную функцию. Таким образом, приближенное решение краевой задачи (2) для случая больших и малых энергий имеет вид

$$\begin{aligned}
 N_{\text{H}}(x, \eta) &= N_{0\text{H}}(x, \eta) + N_{1\text{H}}(x, \eta) = \eta^{-(\gamma+2)} \exp\left[(\gamma+2) \frac{\mu(x-1)}{3}\right] + \\
 &+ \eta^{-(\gamma+2)} \frac{\gamma-1}{3} \exp\left[\frac{\mu(\gamma+2)(x-1)}{3}\right] \left[ \mu(1-x) - \frac{6}{\gamma+2} \ln \frac{1}{x} - \right. \\
 &\left. - \frac{18}{(\gamma+2)^2 \mu} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{18}{(\gamma+2)^2 \mu} \int_x^1 \frac{1}{\xi^2} \exp\left(-\frac{\mu(\gamma+2)\xi}{3}\right) d\xi \right], \\
 N_{\text{L}}(x, \eta) &= N_{0\text{L}}(x, \eta) + N_{1\text{L}}(x, \eta) = \\
 &= \eta^{-1} \exp\left[\frac{\mu(x-1)}{3}\right] - \eta^{-1} \frac{2}{3} \exp\left[\frac{\mu(x-1)}{3}\right] \left\{ \mu(1-x) - 6 \ln \frac{1}{x} - \right. \\
 &\left. - \frac{18}{\mu} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - \frac{18}{\mu} \int_x^1 \frac{1}{\xi^2} \exp\left(-\frac{\mu\xi}{3}\right) d\xi \right\}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

С другой стороны, формула (4) для случаев высокой и малой энергии приводит к выражениям

$$\begin{aligned}
 N_{\text{H}}(x, \eta) &= \eta^{-(\gamma+2)} + (\gamma+2) \eta^{-(\gamma+2)} \left[ 1 - \frac{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu\right)} \right] + \\
 &+ \frac{1}{2!} (\gamma+2)(\gamma+3) \eta^{-(\gamma+2)} \left[ 1 - \frac{2F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu\right)} + \frac{F\left(-\frac{4}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{4}{3}, 2; \mu\right)} \right] + \dots \\
 N_{\text{L}}(x, \eta) &= \eta^{-1} + \eta^{-1} \left[ 1 - \frac{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu\right)} \right] + \\
 &+ \eta^{-1} \left[ 1 - \frac{2F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{2}{3}, 2; \mu\right)} + \frac{F\left(-\frac{4}{3}, 2; \mu x\right)}{F\left(-\frac{4}{3}, 2; \mu\right)} \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{11}$$

Теперь можно сравнить точные решения (5), (6), (11) с решениями (10), полученными при помощи итерационного метода.

На рис. 1 изображена зависимость концентрации ГКЛ нормированной на концентрацию на границе гелиосферы  $N(\eta, x)/N_0(\eta)$  для всех трех решений. Параметр модуляции  $\mu = 3$  соответствует скорости солнечного ветра  $u = 400$  км/с, радиусу гелиосферы  $r_0 = 100$  а. е., коэффициенту диффузии космических лучей  $\kappa = 2 \cdot 10^{18}$  м<sup>2</sup>/с. Самая нижняя кривая 1 описывает первую поправку к нулевому приближению, выше следует кривая 2, описывающая нулевое приближение, точки — плотность КЛ как результат суммы нулевого и первого шагов итерации. Практически сливается с точками кривая 3, описывающая точное аналитическое решение краевой задачи, верхняя кривая 4 описывает паркеровское решение для полноты картины. Как видно, концентрация ГКЛ, полученная при помощи точного аналитического решения диффузионно-конвекционного уравнения (5), практически не отличается от концентрации, полученной при помощи итерационного метода.

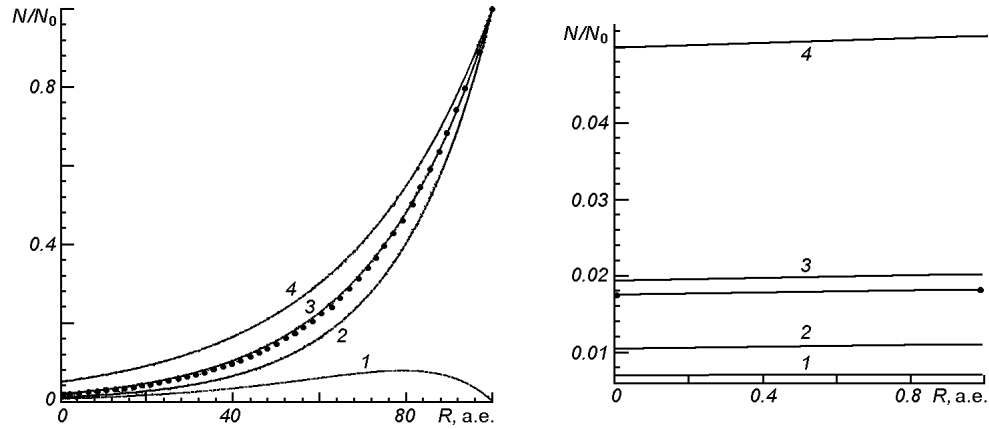


Рис. 1. Нормированная плотность ГКЛ в зависимости от расстояния до Солнца на протяжении всей области модуляции  $0 < R < 100$  а. е.: кривая 1 — первая поправка к нулевому приближению, 2 — нулевое приближение, точки — их сумма, 3 — точное аналитическое решение, 4 — паркеровское решение

Рис. 2. Фрагмент рис. 1 в пределах  $0 < R < 1$  а. е.

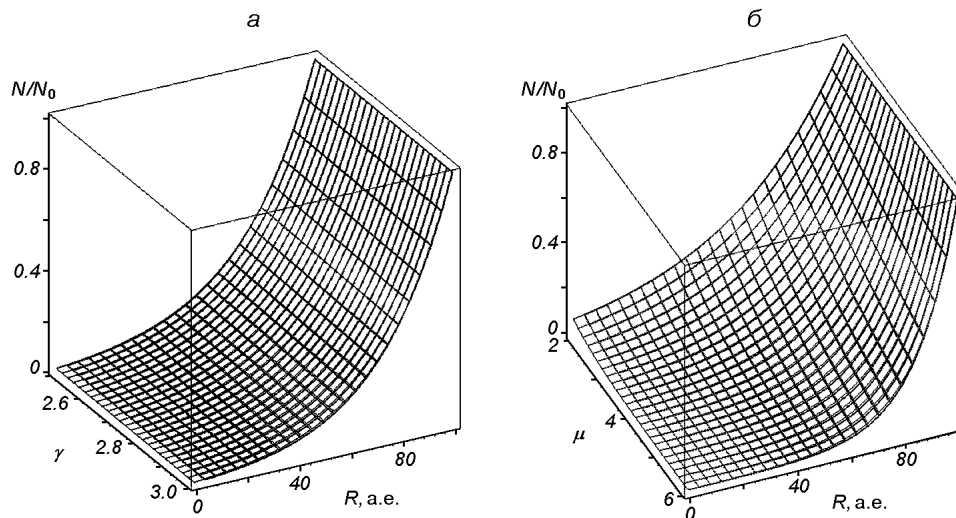


Рис. 3. Зависимость нормированной плотности ГКЛ от расстояния до Солнца и показателя спектра  $\gamma$  (а) и параметра модуляции  $\mu = uR/\kappa$  (б)

На рис. 2 изображена аналогичная зависимость, что и на рис. 1, но в пределах от Солнца до земной орбиты  $r \in [0, r_3]$ . Точность метода не зависит ни от  $\gamma$ , ни от параметра модуляции  $\mu$  (рис. 3).

Из результатов работы можно сделать вывод, что предлагаемый итерационный метод обладает приемлемой точностью. Решение полученное этим методом может быть использовано вместо точного, как правило достаточно громоздкого. И, наконец, самое важное: метод может быть распространен на решение более сложных уравнений, точное аналитическое решение которых недоступно.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М.: Наука, 1973.—294 с.

2. Долгинов А. З., Топтыгин И. Н. Теория движения космических частиц в межпланетных магнитных полях // Тр. пятой Всесоюзной школы по космофизике. — Апатиты: Изд-во Кольского филиала АН СССР, 1968.—С. 167—182.
3. Дорман Л. И. Модуляция космических лучей в межпланетном пространстве // Космич. лучи.—1967.—№ 8.—С. 305—320.
4. Дорман Л. И. Экспериментальные и теоретические основы астрофизики космических лучей. — М.: Наука, 1975.—462 с.
5. Дорман Л. И., Кац М. Е., Федоров Ю. И., Шахов Б. А. О балансе энергии космических лучей в случайном магнитном поле // Космические исследования на Украине.—1979.—№ 13.—С. 58—69.
6. Топтыгин И. Н. Космические лучи в межпланетных магнитных полях. — М.: Наука, 1983.—302 с.
7. Dorman L. I., Katz M. E., Fedorov Yu. I., Shakhov B. A. Variations of cosmic ray energy in interplanetary space // *Astrophys. and Space Sci.*—1983.—94.—P. 43—95.
8. Goldstein M. L., Fisk L. A., Ramaty R. Energy loss of cosmic rays in the interplanetary medium // *Phys. Rev. Lett.*—1970.—25, N 12.—P. 832—838.
9. Lupton J. E., Stone E. S. Solar flare particle propagation: Comparison of new analytic solution with spacecraft measurements // *J. Geophys. Res.*—1973.—78, N 7.—P. 1007—1018.
10. Parker E. N. The passage of energetic charged particles through interplanetary space // *Planet Space Sci.*—1965.—13.—P. 9—49.
11. Webb G. M. Monoenergetic-source solutions of the steady-state cosmic ray equation of transport // *Astrophys. and Space Sci.*—1977.—50.—P. 349—360.

Поступила в редакцию 27.09.05