

УДК 533.951

**А. С. Парновский, О. К. Черемных**

Институт космических исследований Национальной академии наук  
и Национального космического агентства Украины  
03680 Киев-187, пр. акад. Глушкова 40

### **Желобковые и несжимаемые возмущения во внутренней магнитосфере Земли**

*Исследуются спектры собственных аperiодических МГД-возмущений баллонного типа с полоидальной поляризацией во внутренней магнитосфере Земли в дипольной геометрии геомагнитного поля с учетом конечной проводимости ионосферы. Показано, что возможны решения с различными значениями инкремента/декремента, соответствующие одному и тому же набору параметров. Получено аналитическое выражение для амплитуды продольного смещения вблизи ионосферы. Выведено выражение для границы устойчивости желобковых и несжимаемых мод.*

*ЖОЛОБКОВІ ТА НЕСТИСЛИВІ ЗБУРЕННЯ У ВНУТРІШНІЙ МАГНІТОСФЕРІ ЗЕМЛІ, Парновський О. С., Черемних О. К. — Досліджуються спектри власних аperiодичних МГД-збурень балонного типу з полоїдальною поляризацією у внутрішній магнітосфері Землі в дипольній геометрії геомагнітного поля з урахуванням скінченної провідності іоносфери. Показано, що можливі розв'язки з різними значеннями інкремента/декремента, що відповідають одному й тому ж набору параметрів. Отримано аналітичний вираз для амплітуди поздовжнього зміщення поблизу іоносфери. Виведено вираз для межі стійкості жолобкових і нестисливих мод.*

*FLUTE AND INCOMPRESSIBLE PERTURBATIONS IN THE EARTH'S INNER MAGNETOSPHERE, by Parnowski A. S., Cheremnykh O. K. — Spectra of poloidal aperioidic MHD ballooning eigenperturbations in the Earth's inner magnetosphere are studied with taking into account the finity of ionospheric conductivity and dipolar geometry of the geomagnetic field. We demonstrate that the same set of parameters can yield solutions with different growth rates. An analytic expression for the amplitude of longitudinal displacement near the ionosphere is derived. A stability criterion for flute and incompressible modes are obtained.*

#### **ВВЕДЕНИЕ**

Эта работа является продолжением цикла работ [2—4, 6, 7], посвященных анализу устойчивости и спектров собственных поперечно-мелкомасштабных МГД-возмущений магнитосферного статического плазменного равновесия, обеспечиваемого дипольным магнитным полем и тороидальным кольцевым

током. Используемая нами модель не учитывает конвекции [12, 13], а также нелинейных и кинетических эффектов [1, 5, 8].

### ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Ранее мы [4] получили следующую систему безразмерных уравнений малых колебаний магнитосферной плазмы:

$$\Omega^2 \frac{c^6}{b} \xi + \left( \frac{\xi'}{b} \right)' + \frac{4c^4}{b^2} \left( T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) = 0, \quad (1)$$

$$\Omega^2 c^3 \tau + T_0' = 0. \quad (2)$$

Здесь

$$T_0 = \frac{\beta a}{a + \beta c^6} \left[ c^{-3} \left( \frac{c^6}{b} \tau \right)' - \frac{4c}{b^2} \xi \right], \quad (3)$$

$\Omega = \omega/\omega_A$  — безразмерная частота,  $\omega_A = B_0/(L\sqrt{\rho})$  — альвеновская частота на магнитном экваторе,  $B_0 = M/L^3$  — величина магнитного поля на магнитном экваторе,  $L$  — параметр Мак-Илвайна,  $M$  — магнитный дипольный момент Земли;  $x = \sin\theta$ ,  $\theta$  — полоидальный угол, отсчитываемый от магнитного экватора (геомагнитная широта);  $b = 1 + 3x^2$ ,  $\alpha = -\frac{L}{p} \frac{dp}{dL}$  — профиль давления,  $\beta = \gamma p/B_0^2$  — плазменный параметр,  $\gamma = 5/3$  — показатель адиабаты; штрих обозначает производную по  $x$ , все остальные обозначения общепринятые. Уравнения (1) и (2) «зацеплены» между собой и описывают взаимодействие полоидальных альвеновских и медленных магнитозвуковых мод.

При описании равновесия магнитосферной плазмы мы пренебрегали отклонениями геомагнитного поля от дипольного

$$\mathbf{B} = [\nabla\Psi\nabla\varphi], \quad (4)$$

где  $\Psi$  — полоидальный магнитный поток,  $\varphi$  — тороидальный угол (геомагнитная долгота), что справедливо при рассматриваемых конечных давлениях плазмы ( $\beta < 1$ ). При этом считалось, что равновесие магнитосферной плазмы является статическим и обеспечивается тороидальным током в отсутствие конвекции и изотропным давлением. При получении уравнений (1)–(3) вектор смещения элемента объема плазмы  $\xi$  был представлен в виде

$$\xi = \xi \frac{\nabla\Psi}{|\nabla\Psi|^2} + \eta \frac{[\mathbf{B}\nabla\Psi]}{|\mathbf{B}|^2} + \tau \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2}.$$

Предполагалось, что амплитуды возмущений  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$  удовлетворяют приближению баллонных возмущений

$$\frac{|\nabla\Psi \cdot \nabla X|}{|\nabla\Psi|}, \frac{|[\mathbf{B}\nabla\Psi] \cdot \nabla X|}{|\mathbf{B}| |\nabla\Psi|} \gg \frac{|X|}{l}, \frac{|\mathbf{B} \cdot \nabla X|}{|\mathbf{B}|}, \quad (5)$$

где  $l$  — характерный пространственный масштаб изменения равновесных величин, а  $X$  — любое из смещений  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ .

Мы рассматривали эти возмущения [2, 4, 6, 7] преимущественно с жесткими граничными условиями, соответствующими отсутствию возмущений на идеально проводящей ионосфере. Теперь же мы рассмотрим их с граничными условиями, полученными нами в работе [3] и качественно

совпадающими с граничными условиями из работ [10, 11]. Они имеют следующий вид:

$$\Omega b\xi + i\delta \left[ 2x\xi' - c^5 \left( T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) \right] \Big|_{x=\pm x_0} = 0, \quad (6)$$

$$\xi + 2xc\tau \Big|_{x=\pm x_0} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $\delta = (\Sigma_p \omega_A)^{-1}$  — квадрат толщины ионосферного скин-слоя,  $\Sigma_p$  — интегральная проводимость Педерсена;  $x_0 = \sqrt{1 - L^{-1}}$  — значение координаты  $x$  на верхней границе ионосферы. Далее мы будем использовать обозначения  $b_0 = 1 + 3x_0^2$ ,  $c_0 = 1 - x_0^2$ .

Легко видеть, что граничное условие (6) является комплексным. В силу этого собственные функции  $\xi$ ,  $\tau$  и частота  $\Omega$  также будут комплексными. В этом случае система (1)—(3), (6), (7) является довольно сложной для аналитического рассмотрения. Однако указанная система имеет класс решений, когда собственные функции действительны. Он соответствует случаю аperiодических возмущений, когда  $\text{Re}\Omega = 0$ ,  $\Omega = i\Gamma$ , где  $\Gamma > 0$  — инкремент, а  $\Gamma < 0$  — декремент. Этот класс решений включает в себя желобковые моды, которые, как было показано нами в работе [3], определяют общую устойчивость системы к МГД-возмущениям. Уравнения (3), (7) при этом остаются неизменными, а уравнения (1), (2), (6) можно переписать в виде

$$-\Gamma^2 \frac{c^6}{b} \xi + \left( \frac{\xi'}{b} \right)' + \frac{4c^4}{b^2} \left( T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) = 0, \quad (8)$$

$$-\Gamma^2 c^3 \tau + T_0' = 0, \quad (9)$$

$$\Gamma b\xi + \delta \left[ 2x\xi' - c^5 \left( T_0 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \xi \right) \right] \Big|_{x=\pm x_0} = 0. \quad (10)$$

Нетрудно заметить, что система (7)—(10), как и система (1), (2), (6), (7), обладает симметрией относительно смены знака  $x$ . Поэтому логично будет разделить все моды на четные (симметрические) и нечетные (кососимметрические). Четность решения мы будем определять по полоидальной альвеновской моде ( $\xi$ ); медленная магнитозвуковая мода ( $\tau$ ) будет при этом иметь противоположную четность. При этом для четной моды

$$\xi' \Big|_{x=0} = 0, \quad \tau \Big|_{x=0} = 0, \quad (11)$$

а для нечетной —

$$\xi \Big|_{x=0} = 0, \quad \tau' \Big|_{x=0} = 0. \quad (12)$$

Целью исследования системы (7)—(10) являлось определение зависимости инкремента/декремента аperiодических возмущений от параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$  и  $L$ . Кроме того, нас интересовал вид собственных функций. Однако прежде чем перейти к результатам численных расчетов, приведем ряд аналитических соотношений.

#### АНАЛИТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

Рассмотрим поведение системы при малых значениях  $\beta$ . При малых  $\Gamma$  и  $\beta$  уравнение (8) имеет два очевидных решения  $\xi = \text{const}$  (желобковые возмущения — четные) и  $\xi = \text{const} \cdot (x + x^3)$  (несжимаемые возмущения — нечетные). Далее мы положим эти константы равными единице для нормировки.

Значения параметров в зависимости от параметров Мак-Илвайна

L	$\delta_0$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$
2	2.555	1.632	5.028	2.602	0.515	5.759
3	2.522	1.887	5.806	2.541	0.506	5.853
4	2.495	2.002	6.159	2.533	0.504	5.861
5	2.478	2.068	6.361	2.531	0.504	5.863
6	2.465	2.111	6.492	2.530	0.504	5.863
7	2.456	2.141	6.584	2.530	0.504	5.863
8	2.450	2.163	6.652	2.530	0.504	5.863
9	2.444	2.180	6.705	2.530	0.504	5.863
10	2.440	2.194	6.746	2.530	0.504	5.863

Для четных мод существует решение с  $\Gamma = k\beta$ ,  $k = \text{const}$ . Для них  $\xi = 1 + \beta f(x)$ . Из выражений (8), (10) мы получаем в первом порядке по  $\beta$

$$\left(\frac{f'}{b}\right)' + \frac{4c^4}{b^2} \left[ c^{-3} \left(\frac{c^6}{b\tau}\right)' - \frac{4c}{b^2} + \frac{\alpha}{\gamma} \right] = 0, \quad (13)$$

$$kb_0 + 2\delta x_0 f'(x_0) = 0. \quad (14)$$

Расчеты показывают, что в уравнении (13) членом, содержащим  $\tau$ , можно пренебречь, в частности потому, что  $\tau$  существенно отличается от нуля лишь в той области, где величина  $c$  мала. Аналогично в уравнении (14) мы пренебрегли членом, пропорциональным  $c_0^5$ . Поэтому с учетом того, что  $f'(0) = 0$ , выражение для  $f'$  примет вид

$$f' = b \int_0^x \left( \frac{16c^5}{b^4} - 4 \frac{\alpha}{\gamma} \frac{c^4}{b^2} \right) dx. \quad (15)$$

Выразив из (15)  $f'(x_0)$ , подставим его в (14) и получим

$$k = \delta \left( \frac{\alpha}{\gamma} R_1 - R_2 \right), \quad (16)$$

$$R_1 = 8x_0 \int_0^{x_0} \frac{c^4}{b^2} dx, \quad R_2 = 32x_0 \int_0^{x_0} \frac{c^5}{b^4} dx.$$

Из (16) мы видим, что  $k \sim \delta$ . Кроме того,  $k$  увеличивается при увеличении  $\alpha$  и проходит через ноль при  $\alpha/\gamma = R_2/R_1$ , что соответствует границе устойчивости. Отметим, что, заменив входящие в  $R_1$  и  $R_2$  интегралы единицами, мы получим классический критерий желобковой устойчивости Голда [9]. В реальности же интегралы  $R_1$  и  $R_2$  зависят от  $x_0$ , и следовательно, от числа Мак-Илвайна  $L$ . Правда, при больших значениях  $L$  эта зависимость очень слабая, так как числители подинтегральных выражений стремятся к нулю при  $x_0 \rightarrow 1$  ( $L \rightarrow \infty$ ). Значения  $R_1$  и  $R_2$  в зависимости от  $L$  приведены в таблице.

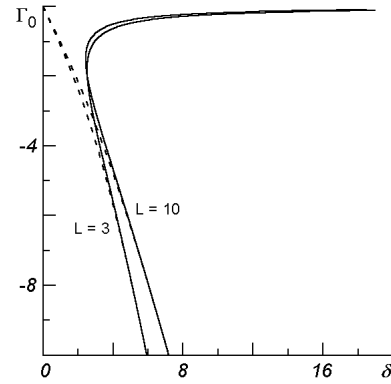
Для нечетных мод  $\xi = x + x^3 + O(\beta)$ . Подставляя это в выражение (10), получаем

$$\Gamma(1 + x_0^2) + 2\delta = 0,$$

что невозможно, когда  $\Gamma \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow 0$ . Таким образом, нечетные моды не могут проходить через точку ( $\Gamma = 0$ ,  $\beta = 0$ ).

Возможна ситуация, когда при  $\beta \rightarrow 0$  величина  $\Gamma$  стремится к конечному значению  $\Gamma_0 \neq 0$ . В нулевом порядке по  $\beta$  уравнения (8), (10) дают

Рис. 1. Зависимость  $\Gamma_0(\delta)$ : сплошная линия — четные моды, штриховая — нечетные



$$\left(\frac{\xi'}{b}\right)' = \Gamma_0^2 \frac{c^6}{b} \xi, \quad (17)$$

$$\delta = -\frac{b_0}{2x_0} \frac{\xi(x_0)}{\xi'(x_0)} \Gamma_0.$$

Для четных мод (11)  $\xi'(0) = 0$ , для нечетных (12) —  $\xi(0) = 0$ . Уравнения (17) легко решаются численно для фиксированных значений  $\Gamma_0$ .

На рис. 1 представлены зависимости  $\Gamma_0(\delta)$  для четных и нечетных мод. Мы видим, что кривая для нечетных мод стремится к нулю при  $\delta = 0$  и имеет решение при любом  $\delta$ . Для четных мод существует минимальное значение  $\delta = \delta_0$ , ниже которого узел ( $\Gamma = \Gamma_0$ ,  $\beta = 0$ ) на оси ординат отсутствует. Значения  $\delta_0$  в зависимости от  $L$  приведены в таблице. Во всех случаях значение  $\Gamma_0$  отрицательно, что соответствует устойчивости.

Рассмотрим теперь поведение системы (7)–(10) вблизи границы устойчивости, т. е. при  $\Gamma \rightarrow 0$ . Из (9) видно, что  $T_0 \rightarrow \text{const}$ . Для четных мод  $\xi \approx 1 + \Gamma^n p(x)$ ,  $T_0 \approx -\alpha\beta/\gamma + \Gamma^k q(x)$ . При этом (9) принимает вид

$$\Gamma^2 c^3 \tau = \Gamma^k q'(x),$$

откуда немедленно получаем  $k = 2$ . С учетом этого (10) преобразуется в

$$\Gamma b_0 + \delta \left[ 2x_0 \Gamma^n p'(x_0) - c_0^5 \left( \Gamma^2 q(x_0) + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \Gamma^n p(x_0) \right) \right] = 0, \quad (18)$$

откуда  $n = 1$ . Теперь мы можем определить вид функции  $\tau$  вблизи границы устойчивости. Для этого запишем выражение для  $T_0$  в нулевом порядке по  $\Gamma$ :

$$c^{-3} \left( \frac{c^6}{b} \tau \right)' = \frac{4c}{b^2} - \frac{\alpha}{\gamma},$$

откуда, с учетом (7),

$$\tau = \frac{b}{c^6} \left[ \int_{x_0}^x \left( \frac{4c^4}{b^2} - \frac{\alpha}{\gamma} c^3 - \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{c^9}{b} \right) dx - \frac{c_0^5}{2x_0 b_0} \right]. \quad (19)$$

Условие (11)  $\tau(0) = 0$  даст нам выражение для границы устойчивости:

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\int_0^{x_0} \frac{4c^4}{b^2} dx + \frac{c_0^5}{2x_0 b_0}}{\int_0^{x_0} c^3 dx + \beta \int_0^{x_0} \frac{c^9}{b} dx} = \frac{R_3(L)}{1 + \beta R_4(L)}. \quad (20)$$

Значения  $R_3$  и  $R_4$  приведены в таблице. Для заданного  $\beta$  и  $L$  можно рассчитать  $\alpha$  по формуле (20). Подставив его в (19), можно получить вид

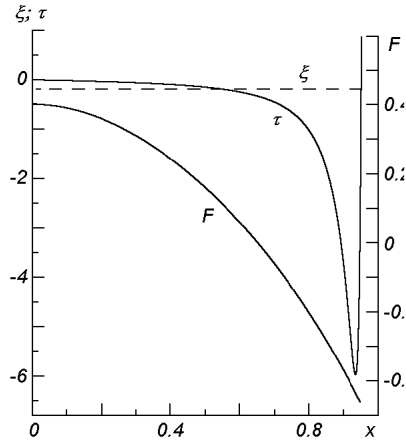


Рис. 2. Собственные функции, а также функция  $F$  желобковой моды вблизи границы устойчивости при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0.73$ ,  $\delta = 2.5$ ,  $L = 10$ ,  $\Gamma = -1.46 \cdot 10^{-3}$  (функция  $\xi$  описывается выражением  $\xi = 1 + \Gamma \delta^{-1} F(x)$ ; максимальные отклонения от единицы равны  $2.3 \cdot 10^{-4}$ ; вид функции  $\tau$  описывается выражением (19))

функции  $\tau$ . Пример такой функции приведен на рис. 2. Что касается функции  $\xi$ , то для нее интересно определить отклонения от константы, задаваемые функцией  $p(x)$ . Она удовлетворяет уравнению (8) в первом порядке по  $\beta$

$$\left(\frac{p'}{b}\right)' + \frac{4\alpha\beta}{\gamma} \frac{c^4}{b^2} p = 0$$

с заданными граничными условиями. Это  $p'(0) = 0$  и получаемое из (18) в первом порядке по  $\beta$  условие

$$2x_0 p'(x_0) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} c_0^5 p(x_0) - \frac{b_0}{\delta}.$$

Решение имеет вид  $p(x) = \delta^{-1} F(x)$ . В частности, это означает, что при  $\delta \rightarrow \infty$  ( $\Sigma_p = 0$ )  $\xi = \text{const}$ , а при  $\delta = 0$  ( $\Sigma_p \rightarrow \infty$ ) отклонения становятся бесконечно большими, т. е. желобковые возмущения не реализуются. Пример функции  $F(x)$  приведен на рис. 2.

Для нечетных функций  $T_0 = 0$ . Это видно из симметрии и может быть доказано из следующих соображений. Введем обозначения  $u(x) = \xi(x)/\xi(x_0)$ ,  $A = T_0/\xi(x_0)$ ,  $t(x) = \tau(x)/\xi(x_0)$ . Из выражения (3) нетрудно получить

$$\left(\frac{c^6}{b} t\right)' = c^3 \left[ \frac{4c}{b^2} u + A \left( \beta^{-1} + \frac{c^6}{b} \right) \right],$$

откуда с учетом (7) получаем

$$t = bc^{-6} \left\{ -\frac{c_0^5}{2x_0 b_0} + \int_{x_0}^x \left[ \frac{4c^4}{b^2} u + A \left( \beta^{-1} c^3 + \frac{c^9}{b} \right) \right] dx \right\}. \quad (21)$$

Условие  $t'(0) = 0$  выполняется только при  $A = 0$ . Этот результат достаточно очевиден из физических соображений: величина  $T_0 = \gamma p \text{div} \xi$  определяет сжимаемость возмущений, и условие  $T_0 = 0$  соответствует несжимаемым возмущениям.

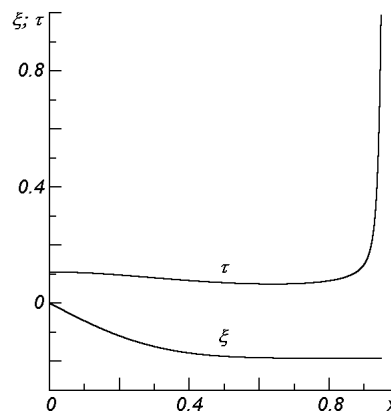
Уравнение (8) приобретает вид

$$\left(\frac{u'}{b}\right)' + \frac{4c^4}{b^2} \frac{\alpha\beta}{\gamma} u = 0. \quad (22)$$

Оно имеет граничные условия

$$u(0) = 0, \quad u(x_0) = 1, \quad u'(x_0) = \frac{c_0^5}{2x_0} \frac{\alpha\beta}{\gamma},$$

Рис. 3. Собственные функции несжимаемой моды ( $\alpha = 20$ ,  $\beta = 0.49$ ,  $\delta = 3$ ,  $L = 10$ ,  $\Gamma = -1.53 \cdot 10^{-3}$ ) Они полностью описываются выражениями (21), (22)



что возможно только при определенном произведении

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma} = R_5(L). \quad (23)$$

Его значения приведены в таблице. При известном значении  $\alpha\beta/\gamma$  можно рассчитать  $u(x)$  по (22) и далее  $t(x)$  по (21). Пример такой функции приведен на рис. 3. Из таблицы нетрудно убедиться, что при  $\beta < 1$  значения  $\alpha$  для желобковых возмущений существенно ниже, чем для несжимаемых возмущений.

#### ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Перейдем к результатам численных расчетов. Они представлены в виде графиков  $\Gamma(\beta)$  при постоянных значениях  $\alpha$  и  $\delta$ . При этом было выбрано значение  $L = 10$ . Отдельно рассматривались случаи четных и нечетных мод. Особое внимание уделялось значениям  $\delta = 0.01, 1, 100$ , соответствующим ионосферной проводимости в дневном, утренне-вечернем и ночном секторах соответственно. Для четных мод рассматривались параметры  $\delta = 2.35$  и  $2.5$ , лежащие немного ниже и выше значения  $\delta_0$ . Соответствующие зависимости показаны на рис. 4,  $a-\delta$ . Для нечетных мод аналогичные графики приведены на рис. 5. Во всех случаях пересечения с осью абсцисс описываются формулами (20) для четных мод и (23) для нечетных. Также для кривых, проходящих через начало координат, выполняется соотношение (16). Значения  $\Gamma_0$  несколько отличаются от приведенных на рис. 2. Это расхождение может быть связано с отбрасыванием члена, содержащего  $\tau$ .

Нас также интересовал вид собственных функций. Вблизи границы устойчивости четные функции полностью совпадают с рассчитанными по формулам (19), (20), а нечетные — (21), (22). В общем случае вдали от границы устойчивости можно получить приближенное выражение для функции  $\tau$  в области  $x \sim 1$ . Этот случай возможен лишь для больших чисел Мак-Илвайна. Функцию  $\tau$  в этом случае можно выразить в виде

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \quad (24)$$

$$\tau_1 = R(1-x)^{-4} [K_2(G(1-x)) - AI_2(G(1-x))],$$

$$A = \frac{K_2(G(1-x_0))}{I_2(G(1-x_0))}, \quad (25)$$

$$\tau_2 = -\frac{1}{4} (1-x)^{-4} \frac{(1-x_0)^3}{I_2(G(1-x_0))} \xi(x_0) I_2(G(1-x)), \quad (26)$$

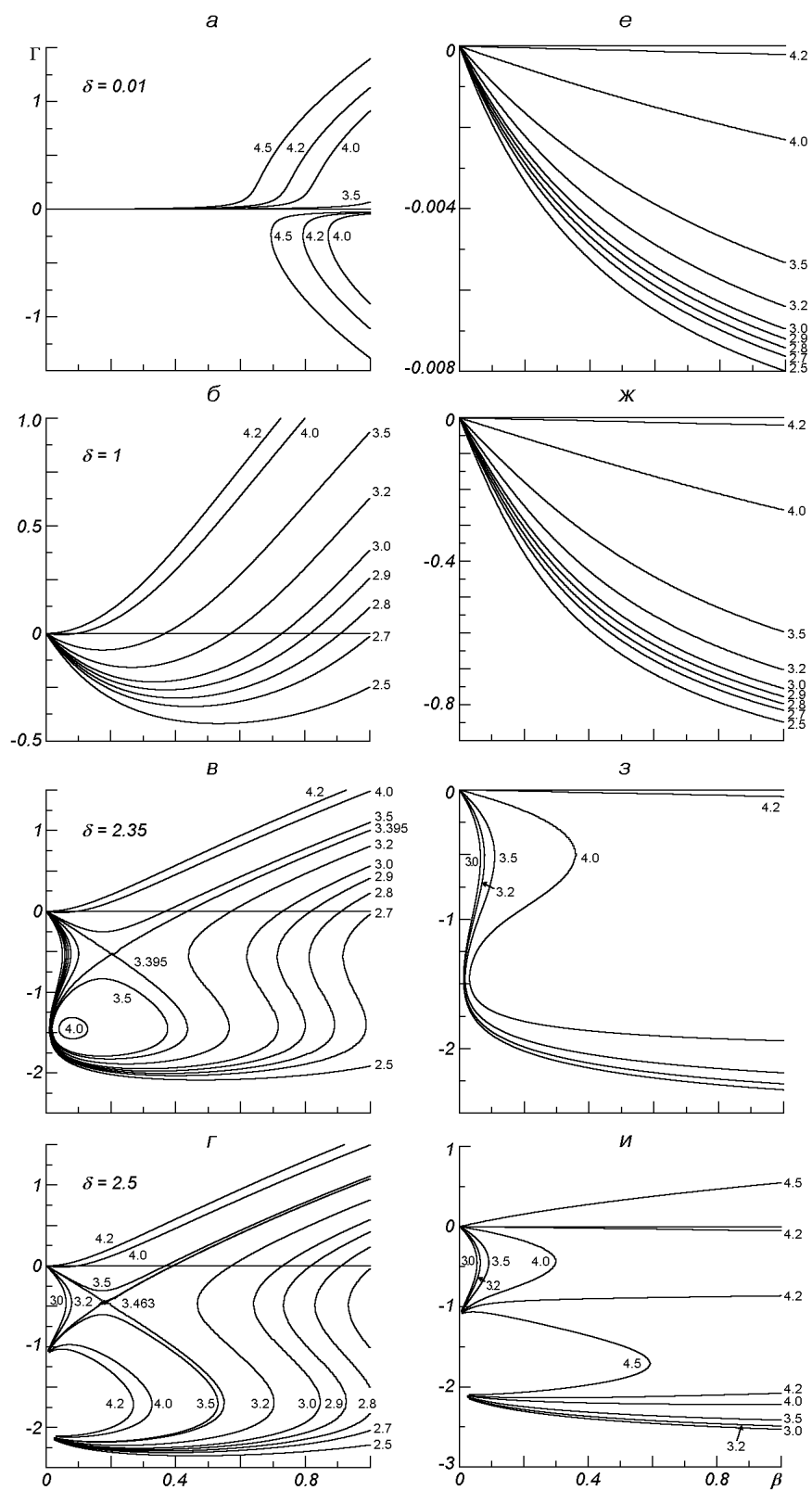


Рис. 4 (начало)



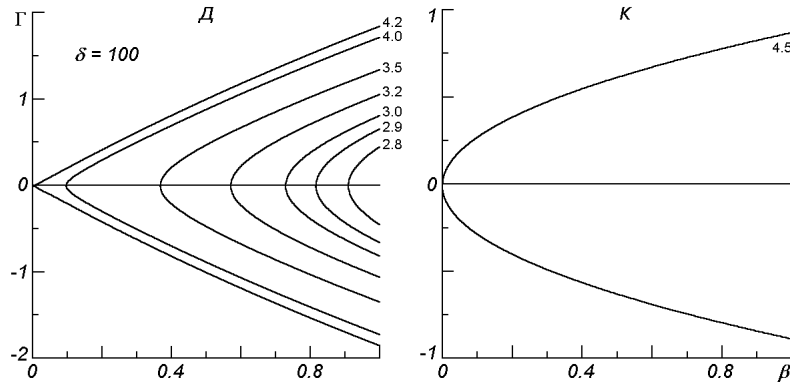


Рис. 4 (окончание). Спектры желобковых мод при  $L = 10$  для разных значений  $\delta$ :  $a-d$  — расчеты для  $T_0$  в виде (3),  $e-k$  — для  $T_0$  в виде (28). Числа у кривых — значения  $\alpha$ . На фрагменте  $a$  видно «перезамыкание» в области больших  $\beta$ , на фрагментах  $b, c$  — сепаратрисы  $\alpha = 3.395$  и  $\alpha = 3.463$ . Изображенные на рис. 4,  $k$  кривые с меньшими значениями  $\alpha$  соединяют начало координат с узлом при  $\beta = 0$ ,  $\Gamma < 0.01$ . На фрагменте  $d$  уходящие вправо вниз кривые сходятся в узловой точке, не помещающейся на рисунке

$$\begin{aligned} \tau_3 = \frac{1}{4} (1-x)^{-4} \left[ K_2(G(1-x)) \int_{1-x_0}^{1-x} \zeta^4 \left( \zeta \frac{d\zeta}{d\xi} + \xi \right) I_2(G\zeta) d\zeta - \right. \\ \left. - I_2(G(1-x)) \int_{1-x_0}^{1-x} \zeta^4 \left( \zeta \frac{d\zeta}{d\xi} + \xi \right) K_2(G\zeta) d\zeta \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $I_2, K_2$  — модифицированные функции Бесселя второго порядка первого и третьего рода соответственно,  $G = 2\beta^{1/2}\Gamma$ , а в формуле (27)  $\xi$  выражается через  $\zeta = 1 - x$ . Функции  $\tau_1$  и  $\tau_3$  обращаются в ноль при  $x = x_0$ , а функция  $\tau_2$  обеспечивает выполнение граничного условия (7). Граничное условие (6) можно удовлетворить путем соответствующего выбора коэффициента  $R$  в (25). Член  $\tau_3$  не дает существенного вклада в  $\tau$ . Пример собственных функций, соответствующих этому случаю, приведен на рис. 6.

#### ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Теперь обсудим точность полученных решений. В работе [7] мы отмечали, что точность уравнений малых колебаний не должна превосходить точности уравнения равновесия, полученного в линейном по  $\beta$  приближении. Исходя из этого, мы записывали уравнение (3) в виде

$$T_0 = \beta \left[ c^{-3} \left( \frac{c^6}{b} \tau \right)' - \frac{4c}{b^2} \xi \right], \quad (28)$$

заменив в нем коэффициент  $\beta b / (b + \beta c^6)$  на  $\beta$ , отбрасывая нелинейную по  $\beta$  поправку. С физической точки зрения это означает, что мы пренебрегаем газокинетическим давлением плазмы по сравнению с давлением магнитного поля Земли. Тем не менее, переписав указанный коэффициент в виде  $(c^6/b + \beta^{-1})^{-1}$ , мы видим, что при не очень малых значениях  $\beta$  соответствующая поправка оказывается существенной в приэкваториальной области, где  $c^6/b \sim 1$ . Поэтому, все приведенные выше результаты были получены с учетом этой поправки. Чтобы оценить ее вклад, мы рассчитали спектры желобковых мод без нее (несжимаемые моды при этом не изменяются, так как для них  $T_0 = 0$ ). Соответствующие графики приведены на рис. 4,  $e-k$

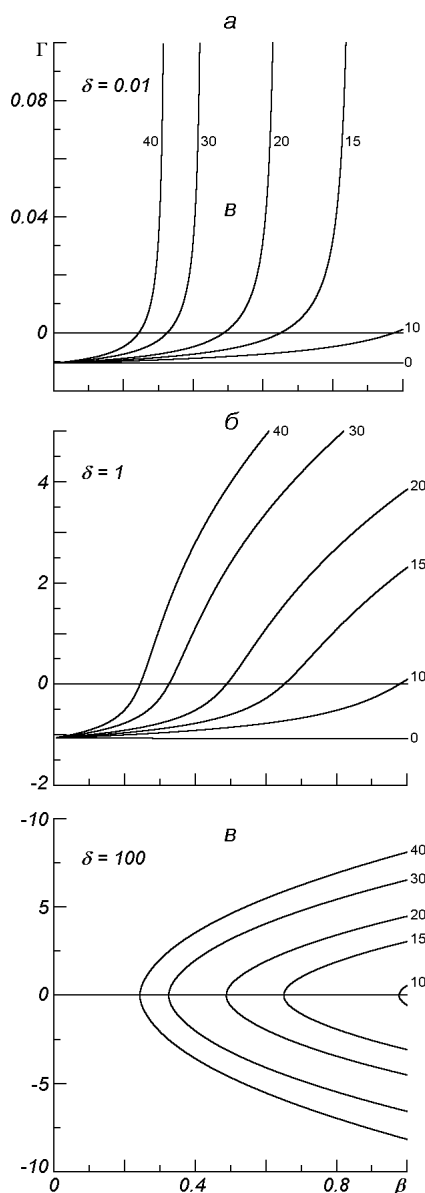


Рис. 5. Спектр несжимаемых мод при  $L = 10$ . Числа возле кривых — значения  $\alpha$  ( $a$  —  $\delta = 0.01$ ,  $б$  —  $\delta = 1$ ,  $в$  —  $\delta = 100$ )

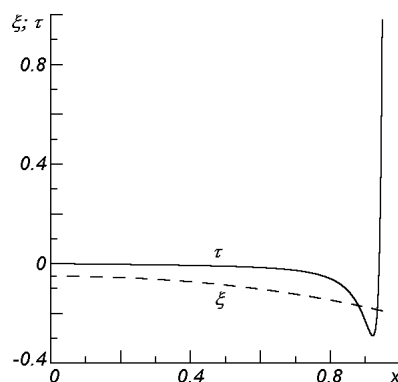


Рис. 6. Собственные функции желобковой моды при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\delta = 2.5$ ,  $L = 10$ ,  $\Gamma = -2.21$ . Вид функции  $\tau$  при  $x > 0.9$  полностью описывается формулами (25), (26) при  $R = 3.77 \cdot 10^{-6}$

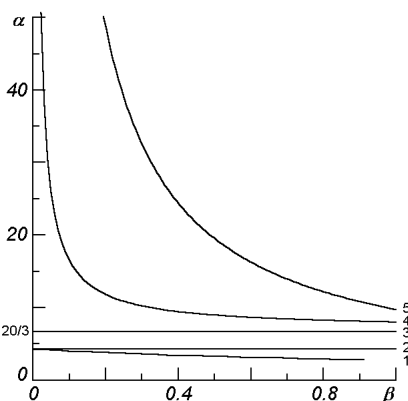


Рис. 7. Диаграмма устойчивости различных поперечно-мелкомасштабных возмущений при  $L = 10$ ,  $\delta = 2.5$ : 1 — граница устойчивости желобковых мод по формуле (20), 2 — то же по формуле (18) работы [6], 3 — то же по критерию Голда, 4 — граница устойчивости сжимаемых баллонных мод при  $\delta = 0$ , 5 — граница устойчивости несжимаемых мод

для желобковых мод. Видно, что хотя они и совпадают с графиками рис. 4,  $a$ — $д$  в пределе  $\beta \rightarrow 0$ , однако во всех остальных областях они существенно отличаются. Наиболее принципиальным различием является граница устойчивости желобковых мод (рис. 7). Граница, рассчитанная с учетом поправки по формуле (20), оказывается ниже границы, рассчитанной без поправки по формуле (18) работы [3], отличающейся от формулы (20) отсутствием члена, содержащего  $\beta$ . Эти факты указывают на важность учета нелинейных по  $\beta$  слагаемых при расчете равновесной плазменной конфигурации.

## ВЫВОДЫ

Система уравнений (1)—(3) с неидеальными граничными условиями (5), (6) на ионосфере допускает существование не только колебательных, но и апериодически нарастающих или затухающих решений. Они делятся на желобковые и несжимаемые моды, причем желобковые моды являются наиболее неустойчивыми среди всех возможных решений указанной системы. Были рассмотрены аналитические решения как при малых значениях  $\beta$ , так и при малых значениях  $\Gamma$ . Кроме того, мы получили численные решения системы при  $0 < \beta \leq 1$ . При этом оказалось, что для одного и того же набора параметров возможны решения с разными значениями  $\Gamma$  как для четных, так и для нечетных функций. Поэтому в общем случае решение будет представлять собой сумму таких решений. Также была рассчитана граница устойчивости, при этом граница устойчивости желобковых мод при малых  $\beta$  совпала с полученным ранее выражением  $\alpha/\gamma = R_3(L)$ ; значение этой функции приведены в таблице. При небольших значениях  $\beta$  величина  $\delta$  определяет масштаб величины  $\Gamma$ . Как видно из графиков, в дневном секторе, при  $\delta \sim 0.01$ , характерные декременты и инкременты имеют порядок 0.01, что позволяет считать их слабоменяющимися. Это, в частности, означает, что возмущения такого типа, возникшие в дневном секторе, доживают до момента существенного повышения  $\delta$ .

1. Войцеховская А. Д., Федун В. Н., Черемных О. К., Юхимук А. К. Трансформация магнитозвуковых волн в космической плазме // Кинематика и физика небес. тел.—2003.—19, № 4.—С. 328—333.
2. Парновский А. С., Черемных О. К. Анализ спектра собственных МГД-возмущений «теплой» плазмы во внутренней магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2003.—9, № 5/6.—С. 111—116.
3. Парновский А. С., Черемных О. К. Баллонные моды во внутренней магнитосфере Земли с учетом конечной проводимости ионосферы // Космічна наука і технологія.—2004.—10, № 5/6.—С. 82—86.
4. Черемных О. К., Бурдо О. С., Кременецкий И. А., Парновский А. С. К теории МГД-волн во внутренней магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2001.—7, № 5/6.—С. 44—63.
5. Юхимук А. К., Юхимук В. А., Кучеренко В. П. Нелинейный механизм генерации альвеновских волн в замагниченной плазме // Кинематика и физика небес. тел.—1995.—11, № 5.—С. 71—77.
6. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S. The theory of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // Adv. Space Res.—2004.—33, N 5.—P. 769—773.
7. Cheremnykh O. K., Parnowski A. S., Burdo O. S. Ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // Planet. Space Sci.—2004.—55, N 13.—P. 1217—1229.
8. Fedun V. M., Yuhimuk A. K., Voitsekhovskaya A. D. The transformation of MHD Alfvén waves in space plasma // J. Plasma Phys.—2004.—70, N 6.—P. 699—707.
9. Gold T. Motions in the magnetosphere of the Earth // J. Geophys. Res.—1959.—64.—P. 1219—1226.
10. Hameiri E. Ballooning modes on open magnetic field lines // Phys. Plasmas.—1999.—6, N 3.—P. 674—685.
11. Hameiri E., Kivelson M. G. Magnetospheric waves and the atmosphere-ionosphere layer // J. Geophys. Res.—1991.—96 A, N 12.—P. 21125—21134.
12. Lakhina G. S., Hameiri E., Mond M. Ballooning instability of the Earth's Plasma Sheet Region in the Presence of Parallel Flow // J. Geophys. Res.—1990.—95 A, N 7.—P. 10441—10448.
13. Lakhina G. S., Mond M., Hameiri E. Ballooning mode instability at the plasmopause // J. Geophys. Res.—1990.—95 A, N 4.—P. 4007—4016.

Поступила в редакцию 25.01.06